FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2020

APUNTES DE LA PRÁCTICA DEL 02/09:
GUÍA 1 - SUPERPOSICIÓN - PROBLEMAS 6, 7 Y 8

El objetivo del presente resuelto es guiar en la resolución de algunos problemas de superposición de la guía 1. De ninguna manera busca reemplazar el trabajo individual de cada estudiante de sentarse en la tranquilidad de su casa y resolver cada problema por sus propios medios. Ante cualquier duda o potencial identificación de typo, comunicarse con el docente mas cercano.

6. Un cilindro infinito de radio a tiene una densidad uniforme de carga, salvo a lo largo de una cavidad cilíndrica de radio b, que corre paralela al eje del cilindro. El eje de la cavidad está a una distancia d del eje del cilindro, tal que $d + b < a$.

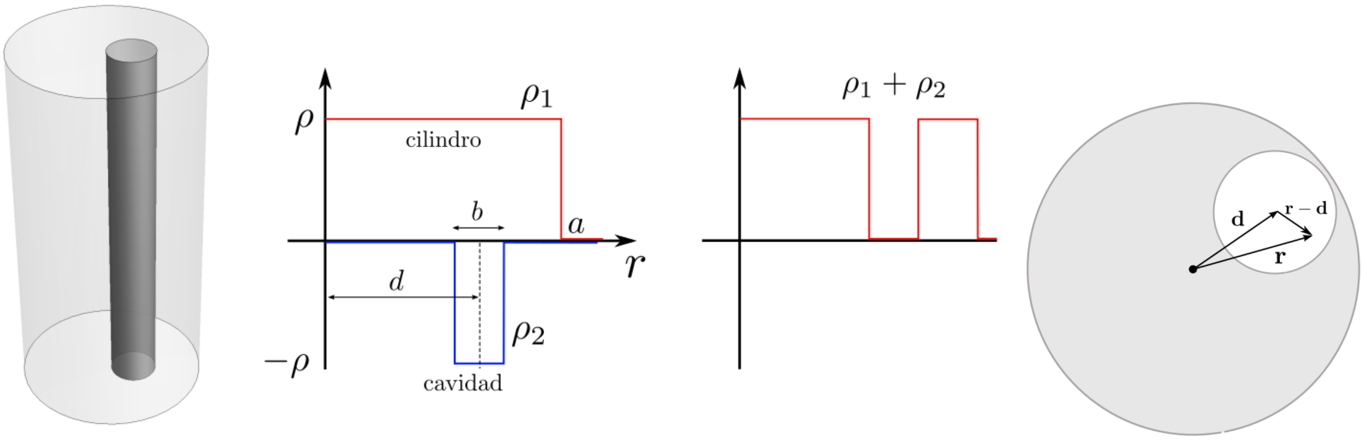

Figure 1: Problema 6 (a).

(a) Calcular el campo eléctrico dentro de la cavidad.

Para calcular el campo eléctrico dentro de la cavidad, utilizaremos superposición de soluciones. Como indica la Figura 2[1], la distribución de carga dentro del cilindro con la cavidad puede pensarse como la superposición de dos distribuciones, una que sea ρ uniforme dentro de todo el cilindro (incluyendo la cavidad), y otra que sea $-\rho$ uniforme dentro de la cavidad y cero en el resto del espacio. Al superponer ambas distribuciones, obtenemos la distribución original.

Utilizando el resultado del Problema 1 (e), y considerando que la cavidad esta desplazada según $\mathbf{d}$ en el plano $x - y$, el campo eléctrico debido al cilindro de radio b, en su interior, es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -2\pi\rho(\mathbf{r} - \mathbf{d}) \tag{1}$$

donde usamos $\mathbf{r}$ como el vector radial de cilíndricas, medido desde el eje del cilindro de radio a (reservamos ρ para la densidad). Por otro lado, el campo eléctrico debido al cilindro de radio a centrado en el origen para $r \leq a$ es,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi\rho\,\mathbf{r}. \tag{2}$$

[1]Los esquemas fueron extraídos de: *Apuntes de la práctica de FT1 de Juan Zanella.*

Luego, por superposición, el campo eléctrico dentro de la cavidad es,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi\rho\mathbf{r} - 2\pi\rho(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = 2\pi\rho\,\mathbf{d}. \tag{3}$$

Es decir, el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme y paralelo a la dirección del desplazamiento **d**.

(b) *sólo para quienes ya se sientan preparadxs para enfrentar a un campo magnético.* Si en lugar de tener una densidad de carga uniforme, el cilindro transportase una corriente uniforme paralela a su eje, calcular el campo magnético dentro de la cavidad.

En este caso, hagan primero el Problema 2 (d). Luego, el campo magnético debido al cilindro desplazado en **d**, en su interior, es,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{2I}{ca^2}\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{d}), \tag{4}$$

notar que en el denominador va el radio a (y no b, por qué?). Por otro lado, el campo magnético debido al cilindro de radio a, en su interior, es

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{2I}{ca^2}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}. \tag{5}$$

Entonces, por superposición, el campo magnético dentro de la cavidad es

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{2I}{ca^2}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r} - \frac{2I}{ca^2}\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \frac{2I}{ca^2}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} \tag{6}$$

En este caso, el campo magnético dentro de la cavidad es uniforme y perpendicular a **d**, o visto de otra forma, perpendicular a **E**:

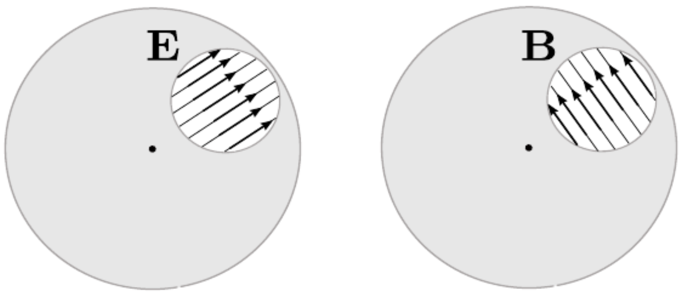

Figure 2: Problema 6.

7. (a) Usando el principio de superposición, encontrar el campo y el potencial electrostático producido por dos hilos paralelos, infinitos, uniformemente cargados con $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Haciendo uso del Problema 1 (d), sabemos que el campo eléctrico de un hilo infinito paralelo a $\hat{\mathbf{z}}$ es $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2\lambda}{\rho}\hat{\rho}$, donde ρ es la coordenada radial de cilíndricas. Luego, para hallar el campo de ambos hilos podemos superponer la solución de cada uno de los dos hilos infinitos.

Consideremos que ambos hilos son paralelos al eje $\hat{\mathbf{z}}$ y que están desplazados en una distancia $\mathbf{a}$ y $-\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ vive en el plano $x - y$ (ver Figura 3). Como el hilo está desplazado, la distancia del punto **r** al hilo será $|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}|$, y el versor de la dirección de **E** es $(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a})/|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}|$. Luego, sumando ambas contribuciones,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\lambda\left(\frac{\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}}{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}|^2} - \frac{\boldsymbol{\rho} + \mathbf{a}}{|\boldsymbol{\rho} + \mathbf{a}|^2}\right) \tag{7}$$

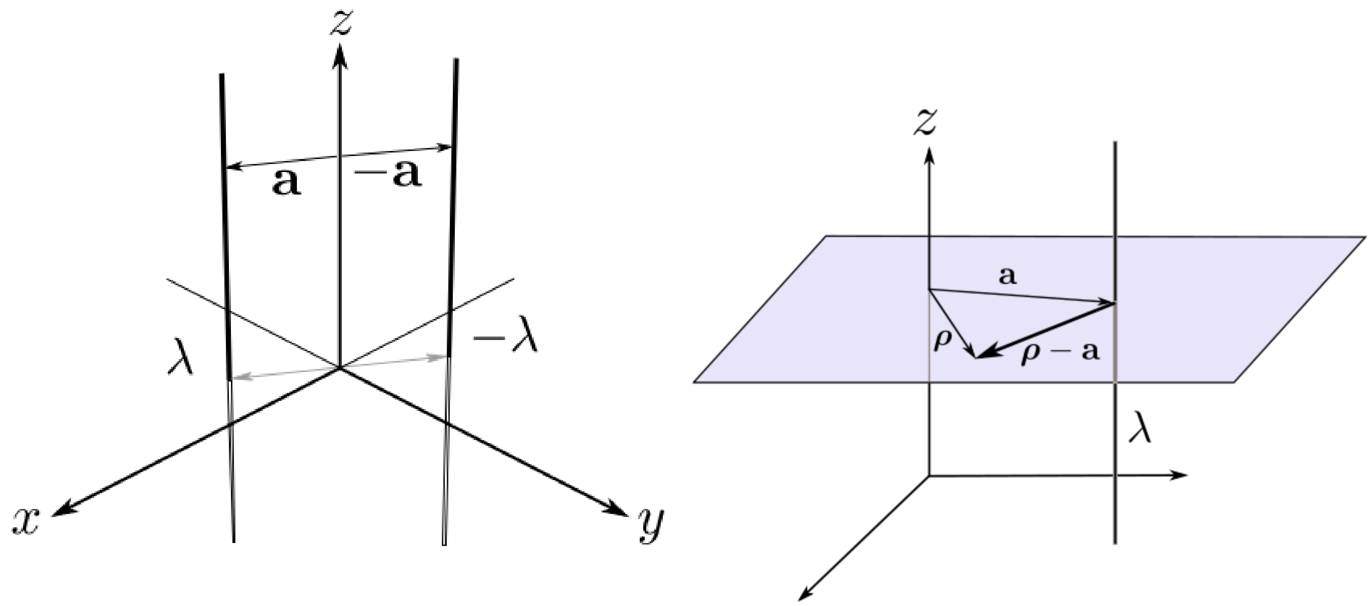

Figure 3: Problema 7 (a).

En el caso del potencial electrostático, queda de tarea mostrar que el mismo corresponde a,

$$\Phi(\mathbf{r}) = -2\lambda\left[\log\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}-\mathbf{a}|}{|\boldsymbol{\rho}_0-\mathbf{a}|}\right) - \log\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}+\mathbf{a}|}{|\boldsymbol{\rho}_0+\mathbf{a}|}\right)\right] = 2\lambda\log\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}+\mathbf{a}|}{|\boldsymbol{\rho}-\mathbf{a}|}\right), \tag{8}$$

usando el mismo procedimiento que para el campo eléctrico.

(b) Encontrar y dibujar cualitativamente las equipotenciales. ¿Qué aspecto tiene el campo en el plano equidistante entre los dos hilos?

Las lineas equipotenciales de Φ corresponden a superficies tal que,

$$2\lambda\log\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}+\mathbf{a}|}{|\boldsymbol{\rho}-\mathbf{a}|}\right) = C. \tag{9}$$

Estas ecuaciones nos darán funciones $\rho(\varphi, C)$ que por simetría corresponderán a cilindros en tres dimensiones o, incluso aun mas simple, círculos en dos dimensiones. Podemos prescindir de la función logaritmo por ahora para nuestro análisis,

$$\frac{|\boldsymbol{\rho}+\mathbf{a}|}{|\boldsymbol{\rho}-\mathbf{a}|} = C' = \exp\left(C/2\lambda\right). \tag{10}$$

Veamos que esta última ecuación corresponde a círculos, elevando al cuadrado y re ordenando,

$$\rho^2 + a^2 + 2\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{a} = C'^2(\rho^2 + a^2 - 2\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{a}), \tag{11}$$

que es igual a,

$$(1-C'^2)\rho^2 + (1-C'^2)a^2 + 2(1+C'^2)\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{a} = 0, \tag{12}$$

o de manera equivalente a,

$$\rho^2 + p^2 - 2\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\rho} = R^2, \tag{13}$$

con,

$$\mathbf{p} = \frac{C'^2 + 1}{C'^2 - 1}\mathbf{a}, \tag{14}$$

$$R = \frac{2C'}{|C'^2 - 1|}a. \tag{15}$$

Queda de tarea, pensar/usar la herramienta que más les guste para estudiar las superficies equipotenciales según los valores de C', graficar las superficies y el inciso (c).

8. (a) Calcular el potencial electrostático para todo punto del espacio producido por una esfera metálica a tierra rodeada por una cáscara esférica con una densidad de carga uniforme σ.

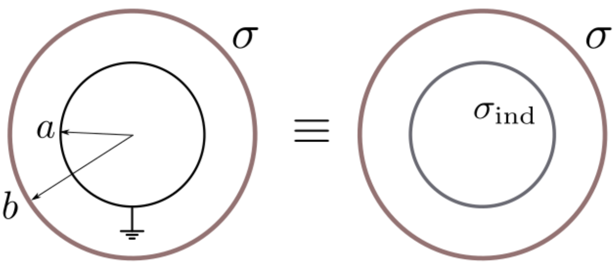

Figure 4: Problema 8 (a).

Podemos notar que sea cual fuera la solución para el potencial, la simetría esférica del problema implica que, si hay una densidad de carga inducida sobre la esfera de radio a, esta densidad debe tener simetría esférica, es decir, debe ser uniforme. Luego, podemos pensar a esta densidad como la incógnita del problema. La ecuación que nos permite hallarla es la condición de potencial igual a cero sobre la esfera de radio a.

Entonces, si sobre la esfera hay una densidad σ_{ind} uniforme, haciendo uso del Problema 1 (b) y el principio de superposición, el potencial es,

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q_{\text{ind}}}{a} + \frac{Q}{b}, & \text{si } r \leq a \\ \frac{Q_{\text{ind}}}{r} + \frac{Q}{b}, & \text{si } a \leq r \leq b \\ \frac{Q_{\text{ind}}+Q}{r}, & \text{si } b \leq r, \end{cases} \tag{16}$$

donde $Q_{\text{ind}} = 4\pi a^2 \sigma_{\text{ind}}$ y $Q = 4\pi b^2 \sigma$. Aplicando la condición de potencial a cero en $r = a$, obtenemos $Q_{\text{ind}} = -aQ/b$ (¿qué les recuerda este resultado?).

(b) Suponiendo conocido el potencial producido por una carga frente a una esfera a tierra y el resultado del ítem anterior, indicar cómo utilizar el principio de superposición en los siguientes casos:

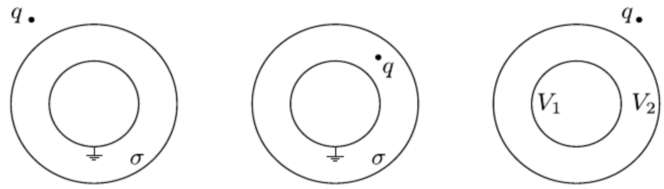

Figure 5: Problema 8 (b).

La superposición de soluciones tiene que respetar dos cosas: i) sobre los contornos donde el potencial está fijado, la suma de las soluciones debe tomar ese valor; ii) en las regiones donde se ha prescrito la densidad de carga, la suma de las densidades de carga que aporta cada término de la superposición tiene que dar la densidad original. De esta manera queda garantizado que la superposición tiene las mismas fuentes que había prescritas en cada región del problema original, y que satisface las mismas condiciones en los contornos.

El primer caso lo podemos pensar como,

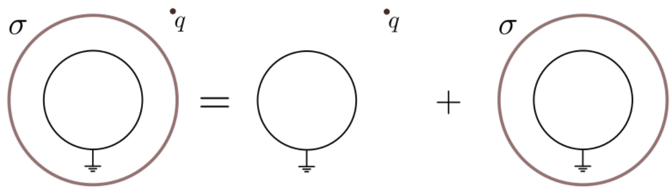

Figure 6: Problema 8 (b).

donde la primer parte se da como conocida y la segunda es el inciso (a). En el segundo caso, la carga se encuentra entre los radios a y b. Este cambio, ¿cambia la solución?

A primera vista, el tercer caso no puede descomponerse en la suma de los dos que se suponen conocidos. Sin embargo, una esfera a potencial V se puede pensar como una esfera a potencial $V + 0$. Asumiendo entonces que conocemos la solución del problema de la carga frente a la esfera a tierra y la solución del problema de las dos esferas a potencial V_1 y V_2, respectivamente (sin la carga) el problema queda resuelto. Queda para ustedes encontrar el potencial para el problema de las dos esferas de radios a y b a potencial V_1 y V_2, respectivamente. La propuesta es que sigan el siguiente método: planteen la ecuación para Φ en cada una de las 3 regiones sin carga: i) $a < r$, ii) $a < r < b$ y iii) $b < r$, esto es

$$\nabla^2\Phi = 0\,. \tag{17}$$

en cada abierto. Dicho de otra forma, el potencial satisface la ecuación de Laplace en cada región. Sabemos que este problema es esféricamente simétrico, por lo que el potencial depende únicamente de la coordenada r, entonces

$$\nabla^2\Phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = 0 \tag{18}$$

(en donde usamos la expresión del operador laplaciano en esféricas). De esto último se ve que la solución más general para $\nabla^2\Phi(r) = 0$, con Φ simétricamente esférico, es: $\Phi(r) = A + B/r$, donde A y B son constantes de integración. Terminen de resolver el problema usando la solución general en cada una de las 3 regiones en donde el laplaciano es cero, e impongan las condiciones de contorno adecuadas para cada región; el potencial no diverge en el origen, $\Phi(a) = V_1$, $\Phi(b) = V_2$ y $\Phi(\infty) = 0$.