

## FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2020

### APUNTES DE LA PRÁCTICA DEL 07/09:

#### GUÍA 1 - LEY DE AMPÈRE, INTEGRACIÓN DIRECTA Y ECUACIÓN DE POISSON - PROBLEMAS 2, 3, 4 Y 5

Para empezar recordemos la ley de Ampère. La misma se puede obtener del rotor del campo magnético en las ecuaciones de Maxwell estáticas en vacío

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1)$$

integrando sobre una superficie  $S$  y usando el teorema de Stokes

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I(S) \quad (3)$$

#### Problema 2

La idea de este ejercicio es usar las simetrías del problema para eliminar dependencias o componentes de los campos a calcular. Para ello recordemos como cambian la distribución de corriente y el campo magnético ante las siguientes transformaciones

$$\text{Traslación: } \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{j}'(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \implies \mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \quad (4)$$

$$\text{Rotación: } \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{j}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{j}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \implies \mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{B}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \quad (5)$$

$$\text{Reflexión: } \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{j}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{j}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \implies \mathbf{B}'(\mathbf{r}) = -\mathbf{R}\mathbf{B}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}). \quad (6)$$

a) En este caso la densidad de corriente es simétrica ante una traslación en  $z$  entonces

$$\mathbf{B}(r, \varphi, z - a) = \mathbf{B}(r, \varphi, z), \quad \forall a \implies \mathbf{B}(r, \varphi, z) = \mathbf{B}(r, \varphi). \quad (7)$$

De la misma forma la densidad de corriente es simétrica ante una rotación alrededor del eje  $z$  entonces el valor que toma cada componente del campo no depende de la coordenada angular (notar que la dirección sí depende del ángulo:  $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi)$ ). Además la densidad de corriente es simétrica ante una reflexión  $\mathbf{R}$  en el plano  $yz$  entonces

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (8)$$

$$-\mathbf{R}\mathbf{B}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B'_r &= -B_r = B_r \\ B'_\varphi &= B_\varphi = B_\varphi \\ B'_z &= -B_z = B_z \end{aligned} \implies \begin{aligned} B_r &= 0 \\ B_z &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Concluimos entonces que

$$\mathbf{B}(r, \varphi, z) = B_\varphi(r) \hat{\varphi}. \quad (11)$$

Usando la ley de Ampère

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I \implies B_\varphi 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I \implies B_\varphi = \frac{2I}{rc}. \quad (12)$$

Para encontrar un potencial vector  $\mathbf{A}$  será útil entender cuales son sus simetrías, para ello recordemos que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \implies \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (13)$$

y eligiendo el gauge de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \implies \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (14)$$

con lo que el potencial vector transforma de la misma manera que la densidad de corriente en este gauge, y usando las mismas 3 transformaciones anteriores concluimos que

$$\mathbf{A} = A_r(r)\hat{r} + A_z(r)\hat{z}. \quad (15)$$

Además, a partir de la transformación compuesta por una reflexión sobre el plano perpendicular al cable y un cambio de signo global, se obtiene que el potencial vector en el gauge de Coulomb tiene  $A_r = 0$ . Usando el rotor en cilíndricas tenemos

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (16)$$

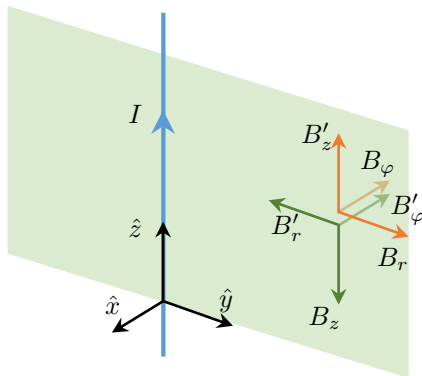
$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ B_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \implies \begin{aligned} 0 &= 0 - 0 \\ \frac{2I}{rc} &= 0 - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ 0 &= \frac{1}{r} (0 - 0) \end{aligned} \quad (17)$$

e integrando obtenemos

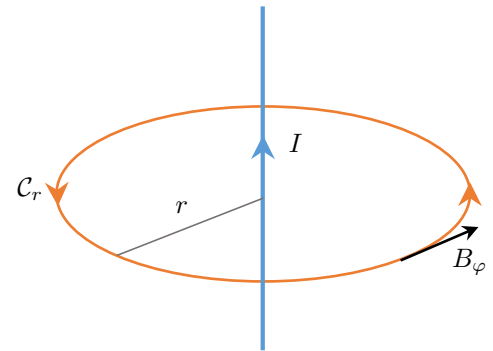
$$A_z = -2\frac{I}{c} \int \frac{1}{r} dr = -\frac{2I}{c} \log(r) + A(r_0). \quad (18)$$

Fijando  $A(r_0) = 0$  tenemos un posible potencial vector (recuerden que no es único) que satisface (19)

$$\mathbf{A} = -\frac{2I}{c} \log(r/r_0)\hat{z}. \quad (19)$$



(a) Problema 2 (a).



(b) Problema 2 (a): Circuito de Ampère.

Fíjense que los ítems (d) y (e) también tienen simetría de traslación en  $z$  y de rotación alrededor de ese eje con lo que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_\varphi(r)\hat{\varphi}, \quad y \quad \mathbf{A} = - \int B_\varphi dr \hat{z}. \quad (20)$$

Además como  $\mathbf{B}$  es constante para un  $r$  fijo también podemos obtener el campo magnético a través de la ley de Ampère usando una circunferencia concéntrica. Para el ítem (d) si el cilindro tiene radio  $a$  y densidad de corriente uniforme  $j$  tenemos

$$\int_{C_r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_{D_r} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (21)$$

$$B_\varphi 2\pi r = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} j \pi r^2, & r < a \\ \frac{4\pi}{c} j \pi a^2, & r \geq a \end{cases} \quad (22)$$

$$\implies B_\varphi = \begin{cases} \frac{2}{c} j \pi r, & r < a \\ \frac{2}{c} j \pi \frac{a^2}{r}, & r \geq a \end{cases}. \quad (23)$$

También se podría expresar en términos de la corriente total del cilindro usando

$$I = \int_{C_a} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = j \pi a^2. \quad (24)$$

Luego usando (20) tenemos que el potencial vector resulta ser

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{c} j \pi r^2 \hat{z}, & r < a \\ [-\frac{2}{c} j \pi a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{c} j \pi a^2] \hat{z}, & r \geq a \end{cases} \quad (25)$$

donde ajustamos la constante de integración para que la función quede continua.

En el ítem (e) si el cilindro tiene radio  $a$  y densidad de corriente superficial uniforme  $g$  tenemos

$$\int_{C_r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_{C_r} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} \quad (26)$$

$$B_\varphi 2\pi r = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{4\pi}{c} 2\pi a g, & r \geq a \end{cases} \quad (27)$$

$$\implies B_\varphi = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{4\pi}{c} \frac{a}{r} g, & r \geq a \end{cases}, \quad (28)$$

que podríamos expresar en términos de la corriente total del cilindro usando

$$I = \int_{C_a} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_{C_a} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi a g. \quad (29)$$

Luego usando (23) tenemos que el potencial vector resulta ser

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & r < a \\ [-\frac{4\pi}{c} g a \ln\left(\frac{r}{a}\right)] \hat{z}, & r \geq a \end{cases}. \quad (30)$$

(g) Nuevamente empezamos con las simetrías y notamos que el toro es invariante ante rotaciones  $\mathbf{R}_\alpha$  alrededor del eje  $z$  y ante reflexión  $\mathbf{R}_{yz}$  en el plano  $yz$ . Usando coordenadas cilíndricas como antes, la

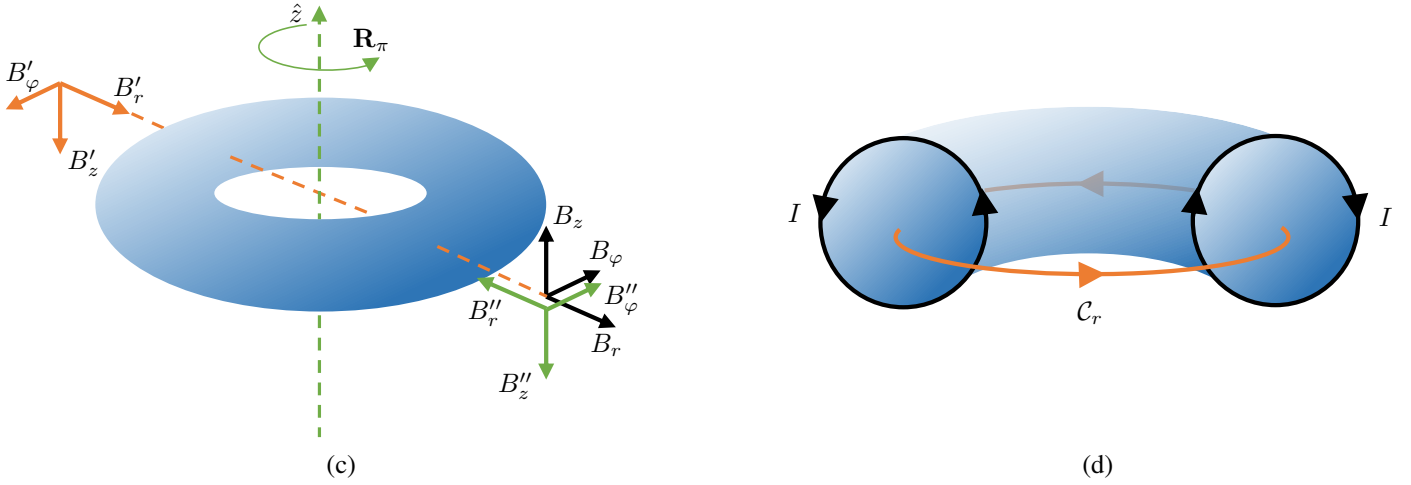


Figure 1

simetría ante rotación nos dice que  $|\mathbf{B}(\mathbf{r})| = |\mathbf{B}|(r, z)$ . Además, dado un punto de la forma  $\mathbf{r} = (r, 0, z)$  si hacemos una reflexión seguida de una rotación en  $\pi$  volvemos al mismo punto y al ser ambas simetrías debe ser

$$\mathbf{B}''(r, 0, z) = \mathbf{B}(r, 0, z) = B_r \hat{r}(r, 0, z) + B_\varphi \hat{\varphi}(r, 0, z) + B_z \hat{z}. \quad (31)$$

Por otro lado, el campo magnético transformado resulta ser

$$\mathbf{B}''(r, 0, z) = \mathbf{R}_\pi \mathbf{B}'(\mathbf{R}_\pi^{-1}(r, 0, z)) \quad (32)$$

$$= \mathbf{R}_\pi [-\mathbf{R}_{yz} \mathbf{B}(\mathbf{R}_\pi^{-1} \mathbf{R}_{yz}^{-1}(r, 0, z))] = \mathbf{R}_\pi [-\mathbf{R}_{yz} \mathbf{B}(r, 0, z)] \quad (33)$$

$$= \mathbf{R}_\pi [-(B_r \hat{r}(r, 0, z) + B_\varphi \hat{\varphi}(r, 0, z) + B_z \hat{z})] = -B_r \hat{r}(r, 0, z) + B_\varphi \hat{\varphi}(r, 0, z) - B_z \hat{z} \quad (34)$$

y reemplazando esto en (34) tenemos

$$-B_r \hat{r} + B_\varphi \hat{\varphi} - B_z \hat{z} = B_r \hat{r} + B_\varphi \hat{\varphi} + B_z \hat{z} \quad (35)$$

$$\implies B_r = 0, \quad B_z = 0. \quad (36)$$

(si bien esto lo hicimos para  $(r, 0, z)$  por simetría de rotación vale para todo  $(r, \varphi, z)$ ) Entonces, si el toro tiene un radio interior  $a$  y uno exterior  $b$ , podemos encontrar el campo magnético usando la ley de Ampère. Para ello tomamos como curva una circunferencia  $C_r$ . Si esta circunferencia se encuentra contenida dentro del toro (entre los radios  $a$  y  $b$ ) entonces concatena la corriente que circula por el radio interior y tenemos

$$\int_{C_r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} NI \quad (37)$$

$$B_\varphi 2\pi r = \frac{4\pi}{c} NI \quad (38)$$

$$\mathbf{B} = \frac{2}{rc} NI \hat{\varphi}, \quad (39)$$

mientras que si la circunferencia se encuentra fuera del toro o bien no concatena corriente (si se encuentra dentro del radio interior o a una altura  $z$  mayor al radio de la sección) o las corrientes que concatena se

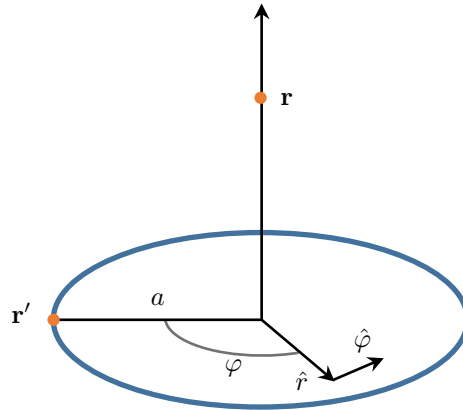
cancelan (puesto que la corriente del radio interior y exterior tiene igual magnitud pero sentido opuesto). Concluimos entonces que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \text{fuera del toro} \\ \frac{2}{rc} NI \hat{\varphi}, & \text{dentro del toro} \end{cases}.$$

### Problema 3

(a) Como la densidad se halla contenida en  $z = 0$  y  $r = a$  podemos escribirla como

$$\rho(\mathbf{r}') = \lambda \delta(r' - a) \delta(z'). \quad (40)$$



El potencial electrostático viene dado por la integral de Poisson que tomando  $\mathbf{r} = z\hat{z}$  es

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda \delta(r' - a) \delta(z')}{\sqrt{a^2 + z^2}} r' dr' d\varphi' dz' \quad (41)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + z^2}} \int_0^{\infty} \delta(r' - a) r' dr' \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z') dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + z^2}} a 2\pi. \quad (42)$$

Ahora podemos tomar el límite  $|z| \gg a \implies 1 \gg \frac{a}{|z|}$  desarrollando en serie de Taylor

$$\phi(|z| \gg a) = 2\pi a \lambda \frac{1}{|z| \sqrt{\frac{a^2}{z^2} + 1}} \quad (43)$$

$$\approx \frac{2\pi a \lambda}{|z|} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{a}{z} \right)^3 \right) \quad (44)$$

o sea que a orden cero en  $a/|z|$  tenemos,  $\phi(|z| \gg a) = \frac{2\pi a \lambda}{|z|} = \frac{Q}{|z|}$  que es el potencial de una carga puntual vista desde el eje  $z$ . En la teoría ya hablaron un poco sobre desarrollo multipolar, en particular vieron los términos monopolar, dipolar y cuadrupolar de la expansión. El término monopolar se caracteriza por un escalar (la carga total), el término dipolar está caracterizado por un vector, y el término cuadrupolar está caracterizado por un tensor (simétrico y de traza nula). Observen que aquí el siguiente término que aparece en el desarrollo es de orden  $z^{-3}$ . Esto indica que el término dipolar,  $\mathcal{O}(z^{-2})$ , no está presente. La razón por la cual no aparece el término dipolar es porque no hay manera de caracterizar la información de un anillo uniforme mediante un vector: para eso sería necesario poder identificar una dirección y un sentido que oriente más carga positiva de un lado que del otro, y eso es imposible para el anillo centrado en el origen.

**Problema 3 (b)** En cilíndricas podemos escribir la densidad de carga como

$$\rho(\mathbf{r}') = \sigma \delta(z') \Theta(a - r'), \quad (45)$$

donde  $\Theta$  es la función de Heaviside. El potencial electrostático se obtiene entonces usando la integral de Poisson

$$\phi(0, z) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma \delta(z') \theta(a - r')}{\sqrt{r'^2 + z^2}} r' dr' d\varphi' dz' \quad (46)$$

usando  $r'^2 + z^2 = u \implies 2r' dr' = du$  tenemos

$$= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z') dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{z^2}^{a^2+z^2} \frac{1}{\sqrt{u}} du \frac{1}{2} = \pi \sigma \frac{u^{1/2}}{1/2} \Big|_{z^2}^{a^2+z^2} \quad (47)$$

$$\phi(0, z) = 2\pi\sigma \left( \sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right) \quad (48)$$

Tomamos el límite  $|z| \gg a \implies 1 \gg \frac{a}{|z|}$  desarrollando en serie de Taylor

$$\phi(0, |z| \gg a) = 2\pi\sigma |z| \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2} - 1 \right) \quad (49)$$

$$\approx \frac{2\pi\sigma a^2}{2|z|} + \mathcal{O}\left(\frac{a}{z}\right) = \frac{Q}{|z|} \quad (50)$$

que es el potencial de una carga puntual. Mientras que si  $a \gg |z| \implies 1 \gg \frac{z}{a}$  tenemos

$$\phi(0, |z| \ll a) = 2\pi\sigma a \left( \sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} - \frac{|z|}{a} \right) \quad (51)$$

$$\approx 2\pi\sigma a \left( 1 - \frac{|z|}{a} \right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{z}{a}\right)^2\right), \quad (52)$$

que a menos de una constante irrelevante corresponde al potencial de un plano infinito.

**Problema 4 (a)** Respetando la simetría del problema trabajaremos en cilíndricas  $\mathbf{r} = (r, \varphi, z)$ . Veamos como escribir la densidad de corriente

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = g \delta(r' - a) \hat{\varphi} \quad (53)$$

donde  $g$  es una constante que representa corriente por unidad de longitud, y podemos determinar integrando

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S} = I(S) \quad (54)$$

$$\int g \delta(r' - a) \hat{\varphi} \cdot d\mathbf{S} = IN = InL \quad (55)$$

$$\int_0^L g \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} dl = gL = InL \implies g = In. \quad (56)$$

Podemos calcular el campo magnética usando Biot-Savart con  $\mathbf{r} = z\hat{z}$ ,  $\mathbf{r}' = a\hat{r} + z'\hat{z} \implies \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a\hat{r} + (z - z')\hat{z}$

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (57)$$

$$= \frac{1}{c} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \frac{In\delta(r' - a)\hat{\varphi} \times [-a\hat{r} + (z - z')\hat{z}]}{[a^2 + (z - z')^2]^{3/2}} adr' d\varphi' dz'. \quad (58)$$

Tenemos entonces

$$B_z = \frac{1}{c} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\pi Ina}{[a^2 + (z - z')^2]^{3/2}} adz' = \frac{2\pi Ina^2}{c} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{[a^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' \quad (59)$$

$$= \frac{2\pi Ina^2}{c} \int_{z-L/2}^{z+L/2} \frac{1}{[a^2 + u^2]^{3/2}} du = \frac{2\pi Ina^2}{c} \frac{u}{a^2 [a^2 + u^2]^{1/2}} \Big|_{z-L/2}^{z+L/2} \quad (60)$$

$$= \frac{2\pi In}{c} \left( \frac{z + L/2}{[a^2 + (z + L/2)^2]^{1/2}} - \frac{z - L/2}{[a^2 + (z - L/2)^2]^{1/2}} \right) \quad (61)$$

$$= \frac{2\pi In}{c} (\cos \theta_2 + \cos \theta_1). \quad (62)$$

**4. (b)**

$$\text{Tomando: } \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (r \cos \varphi - a \cos \varphi') \hat{x} + (r \sin \varphi - a \sin \varphi') \hat{y} + (z - z') \hat{z} \quad (63)$$

$$\hat{\varphi} = (-\sin \varphi' \hat{x} + \cos \varphi' \hat{y}) \quad (64)$$

y usando el teorema del coseno

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (z - z')^2 + r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi'), \quad (65)$$

podemos calcular el campo magnético usando la ley de Biot-Savart como

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{1}{c} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{In\delta(r' - a) (-\sin \varphi' \hat{x} + \cos \varphi' \hat{y})}{[(z - z')^2 + r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')]^{3/2}} \quad (66)$$

$$\times [(r \cos \varphi - a \cos \varphi') \hat{x} + (r \sin \varphi - a \sin \varphi') \hat{y} + (z - z') \hat{z}] r' dr' d\varphi' dz' \quad (67)$$

para simplificar tomamos  $y = 0$ , o sea que,  $B_x = B_\rho$

$$\mathbf{B}(x, 0, z) = \frac{1}{c} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \frac{In (-\sin \varphi' \hat{x} + \cos \varphi' \hat{y}) \times [(r - a \cos \varphi') \hat{x} - a \sin \varphi' \hat{y} + (z - z') \hat{z}]}{[(z - z')^2 + r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi']^{3/2}} ad\varphi' dz' \quad (68)$$

entonces

$$B_x(x, 0, z) = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{In \cos \varphi' (z - z')}{[(z - z')^2 + r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi']^{3/2}} adz' d\varphi' \quad (69)$$

tomando  $b := r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi'$ ,  $u := b + (z - z')^2 \implies du = -2(z - z') dz'$

$$B_x(x, 0, z) = \frac{aIn}{c} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \frac{1}{2} \int_{b+(z-L/2)^2}^{b+(z+L/2)^2} \frac{1}{u^{3/2}} du d\varphi' \quad (70)$$

$$= \frac{aIn}{c} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \frac{1}{2} (-2) \frac{1}{u^{1/2}} \Big|_{b+(z-L/2)^2}^{b+(z+L/2)^2} d\varphi' \quad (71)$$

$$= \frac{aIn}{c} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \left( \frac{1}{\sqrt{b + (z - L/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{b + (z + L/2)^2}} \right) d\varphi'. \quad (72)$$

Para tomar el límite  $r \ll a, z \ll L$  escribimos

$$[b + (z - L/2)^2]^{-1/2} = [r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi' + (z - L/2)^2]^{-1/2} \quad (73)$$

$$= \left[ r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi' + z^2 - Lz + \frac{L^2}{4} \right]^{-1/2} \quad (74)$$

$$= \left( \frac{L^2}{4} \right)^{-1/2} \left[ \left( \frac{2r}{L} \right)^2 + \left( \frac{2a}{L} \right)^2 + \left( \frac{2z}{L} \right)^2 - 8 \frac{a}{L} \frac{r}{L} \cos \varphi' - 4 \frac{z}{L} + 1 \right]^{-1/2} \quad (75)$$

$$= \frac{2}{L} [1 + (\alpha - \beta)]^{-1/2} \approx \frac{2}{L} \left[ 1 - \frac{1}{2} (\alpha - \beta) + \frac{3}{8} (\alpha - \beta)^2 + \mathcal{O}((\alpha - \beta)^3) \right] \quad (76)$$

donde

$$\alpha = \left( \frac{2r}{L} \right)^2 + \left( \frac{2a}{L} \right)^2 + \left( \frac{2z}{L} \right)^2 - 8 \frac{a}{L} \frac{r}{L} \cos \varphi' \ll 1 \quad (77)$$

$$\beta = 4 \frac{z}{L} \ll 1 \quad (78)$$

y de la misma forma

$$[b + (z + L/2)^2]^{-1/2} \approx \frac{2}{L} \left[ 1 - \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + \frac{3}{8} (\alpha + \beta)^2 \right] \quad (79)$$

Volviendo a (50) tenemos

$$B_x(x, 0, z) \approx \frac{aIn}{c} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \frac{2}{L} \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{2} (\alpha - \beta) + \frac{3}{8} (\alpha - \beta)^2 \right] - \left[ 1 - \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + \frac{3}{8} (\alpha + \beta)^2 \right] \right\} d\varphi' \quad (80)$$

$$\approx \frac{aIn}{c} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \frac{2}{L} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\alpha - \beta) + \frac{3}{8} (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) - 1 + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) - \frac{3}{8} (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) \right\} \quad (81)$$

$$\approx \frac{aIn}{c} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \frac{2}{L} \left( \beta - \frac{3}{8} 4\alpha\beta \right) d\varphi' \quad (82)$$

$$\approx \frac{aIn}{c} \beta \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \frac{2}{L} \left( 1 - \frac{3}{2} \alpha \right) d\varphi' \quad (83)$$

$$\approx \frac{aIn}{c} \frac{4z}{L} \frac{2}{L} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{2r}{L} \right)^2 + \left( \frac{2a}{L} \right)^2 + \left( \frac{2z}{L} \right)^2 - 8 \frac{a}{L} \frac{r}{L} \cos \varphi' \right] \right\} d\varphi' \quad (84)$$

usando que  $\int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' = 0$  queda

$$\approx \frac{aIn}{c} \frac{4z}{L} \frac{2}{L} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \frac{3}{2} 8 \frac{a}{L} \frac{r}{L} \cos \varphi' d\varphi' \quad (85)$$

y como  $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi' d\varphi' = \pi$

$$B_x(x, 0, z) \approx 96 \frac{\pi n I a^2 z r}{c L^4}. \quad (86)$$



**Problema 5.** Les proponemos intentar hacer este problema por su cuenta. Si no consiguen el resultado esperado en el ítem (c) vean el procedimiento que se propone a continuación.

Como el núcleo es puntual con carga  $q$ , debe generar un potencial  $\frac{q}{r}$  y su densidad de carga debería ser  $q\delta^3(\mathbf{r})$ . Podemos entonces interpretar el potencial que nos dan como

$$\phi(r) = \frac{q}{r} + \frac{q}{r} (e^{-2r/a} - 1) + \frac{q}{a} e^{-2r/a}. \quad (87)$$

Para hallar la densidad de carga total  $\rho$  podemos usar la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho. \quad (88)$$

Noten que por lo que dijimos antes vale que

$$\nabla^2 \left( \frac{q}{r} \right) = -4\pi q\delta^3(\mathbf{r}) \implies \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \quad (89)$$

entonces

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{q}{r} \right) - \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left[ \frac{q}{r} (e^{-2r/a} - 1) + \frac{q}{a} e^{-2r/a} \right] \quad (90)$$

$$= q\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{q}{r} (e^{-2r/a} - 1) + \frac{q}{a} e^{-2r/a} \right] \right\} \quad (91)$$

$$= q\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left[ -\frac{q}{r^2} (e^{-2r/a} - 1) - \frac{2q}{a} \frac{e^{-2r/a}}{r} - \frac{2q}{a} \frac{e^{-2r/a}}{a} \right] \right\} \quad (92)$$

$$= q\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ -q (e^{-2r/a} - 1) - \frac{2q}{a} r e^{-2r/a} - \frac{2q}{a^2} r^2 e^{-2r/a} \right] \quad (93)$$

$$= q\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{2q}{a} e^{-2r/a} - \frac{2q}{a} e^{-2r/a} + \left( \frac{2q}{a} \right)^2 r e^{-2r/a} - \left( \frac{2q}{a} \right)^2 r e^{-2r/a} + \frac{4q}{a^3} r^2 e^{-2r/a} \right] \quad (94)$$

$$= q\delta(r) - \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a}. \quad (95)$$

veamos que esta densidad resulta en un átomo neutro

$$Q = \int \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \left( q\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a} \right) r^2 dr \sin \varphi d\varphi d\varphi \quad (96)$$

$$= q - \frac{q}{\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi d\varphi \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr \quad (97)$$

$$= q - \frac{q}{\pi a^3} 4\pi \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = q - \frac{q}{a^3} 4 \frac{a^3}{4} = 0, \quad (98)$$

donde la última integral se puede resolver integrando por partes dos veces.