FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2020

PRÁCTICA DEL 09/09:
GUÍA 2 - SEPARACIÓN DE VARIABLES EN COORDENADAS CARTESIANAS:
RECINTOS ACOTADOS

Objetivos de hoy:

- Resolver el potencial electrostático en recintos acotados usando coordenadas cartesianas.
- Plantear la ecuación de Laplace, imponer el método de separación de variables, e identificar direcciones (x, y o z) en donde el teorema de Stürm-Liouville garantiza que existen bases de funciones completas para desarrollar el problema.
- Aplicar condiciones de contorno (valor del potencial o el *salto* de su derivada, en superficies) y usar propiedades de ortogonalidad de la base para hallar la solución del problema.
- *Dividir* un problema de Poisson para que queden dos (o mas) de Laplace + condiciones de contorno.

Breve introducción/ repaso de la teórica

El potencial electrostático $\Phi(\mathbf{r})$ satisface,

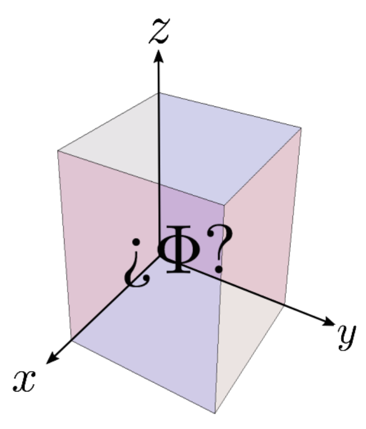
- en general: la ecuación de Poisson $\nabla^2\Phi = -4\pi\rho$
- en ausencia de cargas: la ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$

Dadas condiciones de contorno adecuadas, existe la solución y es única.

Método de separación de variables para resolver Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0\,.$$

Vamos a resolver Φ en el interior de recintos acotados, que sean paralelepípedos en las coordenadas cartesianas (x, y, z). En estos casos las condiciones de contorno estarán dadas sobre los lados de un prisma rectangular:



La ecuación diferencial que queremos resolver es

$$\nabla^2\Phi = \partial_x\partial_x\Phi(x,y,z) + \partial_y\partial_y\Phi(x,y,z) + \partial_z\partial_z\Phi(x,y,z) = 0. \tag{1}$$

El método de separación de variables propone soluciones que sean

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)\,,$$

un producto de 3 funciones, cada una dependiendo únicamente de una de las coordenadas. Introduciendo esta propuesta en (1)

$$\nabla^2 u(x,y,z) = X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0\,,$$

y dividiendo todo por u, tenemos

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{-\alpha} + \underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{-\beta} + \underbrace{\frac{Z''(z)}{Z(z)}}_{-\lambda=\alpha+\beta} = 0\,,$$

donde α, β y λ son constantes, que satisfacen el vínculo $\alpha+\beta+\lambda=0$. Quedan 3 ecuaciones diferenciales de segundo orden, una para cada función de cada variable. Una ecuación, digamos $X''(x) = -\alpha X(x)$, no fija el autovalor α: son las condiciones de contorno específicas de cada problema las responsables de determinar qué valores pueden tomar los autovalores. Repasemos que tipo de soluciones podrían aparecer para estos problemas, tomemos por ejemplo la ecuación en la dirección x,

$$X''(x) + \alpha X(x) = 0\ :$$

- Si $\alpha = k^2 > 0$, la solución es una combinación de senos y cosenos (o exponenciales complejas). Se puede escribir como

$$\begin{aligned} A\sin kx + B\cos kx\,&,\\ A\sin\left[k(x-\tilde{x})\right]&,\\ A\cos\left[k(x-\tilde{x})\right]&,\\ A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}&, \qquad (A,B\in\mathbb{C})\\ \text{etc.}& \end{aligned}$$

  según convenga, con dos coeficientes libres: A y B o $\tilde{x}$.

- Si $\alpha = 0$ la solución es $A + Bx$, con A y B coeficientes libres.

- Si $\alpha = -\gamma^2 < 0$, la solución es una combinación de senos hiperbólicos y cosenos hiperbólicos (o exponenciales reales). Se puede escribir como

$$\begin{aligned} A\sinh(\gamma x) + B\cosh(\gamma x)\,&,\\ A\sinh\left[\gamma(\bar{x}-x)\right] + B\cosh(\gamma x)\,&,\\ A\sinh\left[\gamma(\bar{x}-x)\right] + B\sinh(\gamma x)\,&,\\ A\,e^{\gamma x} + B\,e^{-\gamma x}\,&,\\ \text{etc.}& \end{aligned}$$

  según convenga, con dos coeficientes libres: A y B. (A veces resulta útil plantear, de entrada, un corrimiento $\bar{x}$ en argumento.)

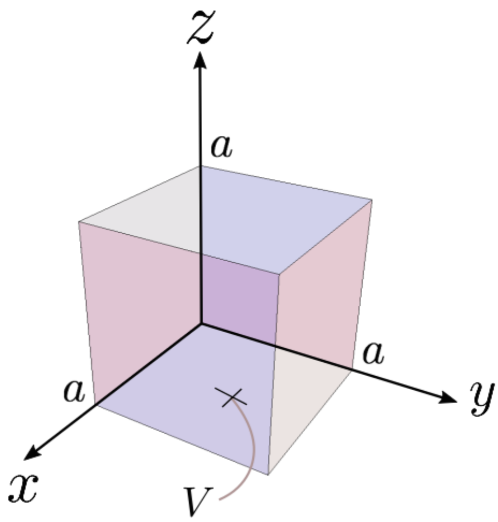
Si podemos catalogar a los autovalores mediante la etiqueta n, las posibles soluciones quedan dadas por el conjunto $\{\alpha_n\}$ y las llamamos $X_n(x)$. De este modo la solución general para el potencial es

$$\Phi(x,y,z) = \text{“}\sum_{n,m}\text{”} X_n(x)Y_m(y)Z_{nm}(z)$$

en donde se suma con n y m para cada autovlaor α_n y β_m, y tenemos $(\alpha_n + \beta_m) = -\lambda_{nm}$ de manera que las funciones $Z_{nm}(z)$ quedaron en término de las etiquetas n y m. La linealidad de la ecuación de Laplace nos permite construir la solución general mediante la suma de cada solución de la ecuación. Las comillas en la expresión anterior, hacen referencia a que esa suma podría ser entendida como una integral en el caso de que un conjunto de autovalores forme un espectro continuo. En el caso de recintos acotados, los autovalores quedan discretizados y vale la expresión con la sumatoria.

Problema 1

Veamos primero el problema no trivial mas sencillo. Un cubo de lado a con una tapa a potencial V y el resto a tierra (potencial cero).



Problema 1: Las tapas cuadradas sin especificar están a tierra.

Buscamos la solución en su **interior** de la forma

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{n,m} X_n(x)Y_m(y)Z_{nm}(z)$$

con un vértice del cubo apoyado en el origen, de forma tal que se satisfacen las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
\Phi(x=0,y,z) &= 0\,, \quad \Phi(x=a,y,z) = 0\\
\Phi(x,y=0,z) &= 0\,, \quad \Phi(x,y=a,z) = 0\\
\Phi(x,y,z=0) &= V\,, \quad \Phi(x,y,z=a) = 0
\end{aligned}$$

Las condiciones de contorno requieren que el potencial se anule en las dos tapas en la dirección x, y en las dos tapas en la dirección y; entonces elegimos las funciones senos y cosenos en esas direcciones, ya que son capaces de anularse para dos puntos de su argumento. Las soluciones exponenciales reales, la constante y la lineal quedan descartadas en x e y porque no se anulan en dos puntos distintos de su argumento y tampoco es posible lograr anularlas mediante combinación lineal de ellas mismas. De esta manera tenemos

$$\begin{aligned}
X_n(x) &= A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x) \\
Y_m(y) &= C_m \sin(k_m y) + D_m \cos(k_m y) \\
Z_{nm}(z) &= E_{nm} \sinh[\gamma_{nm}(a-z)] + F_{nm} \cosh[\gamma_{nm} z]\,, \qquad \gamma_{nm} = \sqrt{k_n^2 + k_m^2}
\end{aligned}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n,m} [A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)\,]\,[C_m \sin(k_m y) + D_m \cos(k_m y)]\,\{E_{nm} \sinh[\gamma_{nm}(a-z)] + F_{nm} \cosh[\gamma_{nm} z]\}$$

$\Big\downarrow$ agrupando y renombrando coeficientes

$$= \sum_{n,m} [A_{nm} \sin(k_n x) + B_{nm} \cos(k_n x)\,]\,[\sin(k_m y) + D_{nm} \cos(k_m y)]\,\underbrace{\left\{\sinh[\gamma_{nm}(a-z)] + \tilde{F}_{nm} \cosh[\gamma_{nm} z]\right\}}_{\tilde{Z}_{nm}(z)}$$

Quedaron 6 incógnitas a determinar en cada término del desarrollo $\{k_n, k_m, A_{nm}, B_{nm}, D_{nm}, \tilde{F}_{nm}\}$, para lo cual se necesita aplicar las 6 condiciones de contorno dadas en el problema.

Aplicando las 5 condiciones de contorno triviales:

$$0 = \Phi(x=0,y,z) = \sum_{n,m} B_{nm}\,[\sin(k_m y) + D_{nm}\cos(k_m y)]\left\{\tilde{Z}_{nm}(z)\right\} \qquad \Longrightarrow\ B_{nm} = 0$$

$$0 = \Phi(x=a,y,z) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin(k_n a)\,[\sin(k_m y) + D_{nm}\cos(k_m y)]\left\{\tilde{Z}_{nm}(z)\right\} \qquad \Longrightarrow\ k_n = \frac{n\pi}{a}\,,\ n \in \mathbb{N}$$

$$0 = \Phi(x,y=0,z) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin(k_n x) D_{nm} \left\{\tilde{Z}_{nm}(z)\right\} \qquad \Longrightarrow\ D_{nm} = 0$$

$$0 = \Phi(x,y=a,z) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin(k_n x) \sin(k_m a) \left\{\tilde{Z}_{nm}(z)\right\} \qquad \Longrightarrow\ k_m = \frac{m\pi}{a}\,,\ m \in \mathbb{N}$$

$$0 = \Phi(x,y,z=a) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin(k_n x) \sin(k_m y) \left\{\tilde{F}_{nm} \cosh[\gamma_{nm} z]\right\} \qquad \Longrightarrow\ \tilde{F}_{nm} = 0$$

obtuvimos

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(k_n x) \sin(k_m y) \sinh[\gamma_{nm}(a-z)]$$

$$\text{con:} \quad k_n = \frac{n\pi}{a}\ ,\ \ k_m = \frac{m\pi}{a}\,,\ \ \gamma_{nm} = \frac{\pi}{a}\sqrt{n^2+m^2}\ , \quad \{n,m\} \in \mathbb{N}$$

y falta imponer la condición:

$$\Phi(x,y,z=0) = V$$

Para resolver esta última ecuación podemos desarrollar la función de la derecha (la constante V en este caso) en la misma base de funciones que aparece en el potencial, de tal forma que podamos igualar coeficiente a coeficiente del desarrollo. Otra manera de despejar es aplicar directamente la ortogonalización a ambos miembros mediante cada elemento de la base, esto es

$$\int_0^a dx \sin(k_{n'}x) \int_0^a dy \sin(k_{m'}y)\, \Phi(x,y,0) = \int_0^a dx \sin(k_{n'}x) \int_0^a dy \sin(k_{m'}y) V$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sinh[\gamma_{nm}a] \underbrace{\int_0^a dx \sin(k_{n'}x)\sin(k_n x)}_{\frac{a}{2}\delta_{nn'}} \underbrace{\int_0^a dy \sin(k_{m'}y)\sin(k_m y)}_{\frac{a}{2}\delta_{mm'}} = V \int_0^a dx \sin(k_{n'}x) \int_0^a dy \sin(k_{m'}y)$$

$$\begin{aligned} A_{nm}\sinh(\gamma_{nm}a)\left(\frac{a}{2}\right)^2 &= V\left[\frac{1-\cos(ak_n)}{k_n}\right]\left[\frac{1-\cos(ak_m)}{k_m}\right] \\ &= V\left[\frac{1-(-1)^n}{k_n}\right]\left[\frac{1-(-1)^m}{k_m}\right] \\ &= V\left(\frac{2}{k_n}\right)\left(\frac{2}{k_m}\right) \qquad : \text{para } n \text{ y } m \text{ impares, cero sino} \end{aligned}$$

$$A_{nm} = \begin{cases} \frac{16V}{\pi^2}\frac{1}{nm\sinh(\gamma_{nm}a)} & \text{si } n \text{ y } m \text{ son impares} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

En la dirección x y la dirección y queda una función par respecto al centro ($x = a/2$, $y = a/2$):

$$\Phi(x,y,z) = \frac{16V}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{impares} \sin(k_n x)\sin(k_m y)\, \frac{\sinh[\gamma_{nm}(a-z)]}{nm\sinh(\gamma_{nm}a)}$$

$$\text{con:} \quad k_n = \frac{n\pi}{a}\ , \quad k_m = \frac{m\pi}{a}\ , \quad \gamma_{nm} = \frac{\pi}{a}\sqrt{n^2+m^2}\ , \quad \{n,m\} \in \mathbb{N}$$

Importante: **Además de satisfacer las condiciones de contorno en las direcciones triviales, la elección de las trigonométricas es esencial para la construcción de la solución. La razón es que forman una base *completa* de funciones. Si no contáramos con una base completa no podríamos desarrollar las funciones arbitrarias que quedan en los contornos de la tercer dirección. Aquí es donde el teorema de Stürm Liouville se vuelve fundamental para garantizar la construcción de la solución mediante este método.**

Aplicado a problemas en recintos acotados en cartesianas, Stürm Liouville nos dice que las soluciones de

$$X_n''(x) = -k_n^2\, X_n(x)\,, \quad x \in [0, a]$$

que satisfacen las condiciones de contorno

$$X_n(0) = X_n(a) = 0 \;\; \text{(tipo Dirichlet)}$$

son ortogonales entre sí, si corresponden a autovalores diferentes. Además: el conjunto de autovalres $\{k_n^2\}$ es discreto y ordenado, y las autofunciones $\{X_n\}$ normalizadas forman una base completa de $\mathbb{L}^2$ en $[0, a]$ (pueden desarrollar cualquier función del conjunto $\mathbb{L}^2$ en el intervalo). Precisamente, estamos hablando de las funciones trigonométricas, y las relaciones de ortogonalidad y completitud que nos lo garantizan son:

$$\int_0^a dx\, \sin(k_{n'}x)\, \sin(k_n x) = \frac{a}{2}\, \delta_{nn'}$$

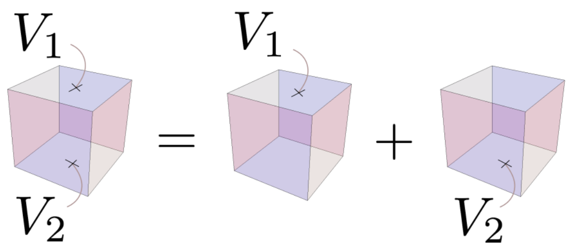
y

$$\sum_n \sin(k_n x)\, \sin(k_n x') = \frac{a}{2}\, \delta(x - x')$$

respectivamente.*

Cada vez que encaremos un problema para resolver mediante separación de variables, tendremos que buscar en qué direcciones se puede plantear Stürm-Liouville. En esa dirección usaremos el conjunto completo de funciones (la base) que permite desarrollar la solución. Para problemas en cartesianas, dicho mas fácil, se busca las direcciones en donde se puede usar la base de senos y/o cosenos.

Problema 1: otras condiciones de contorno.



$$\Phi_{12} = \Phi_1 + \Phi_2$$

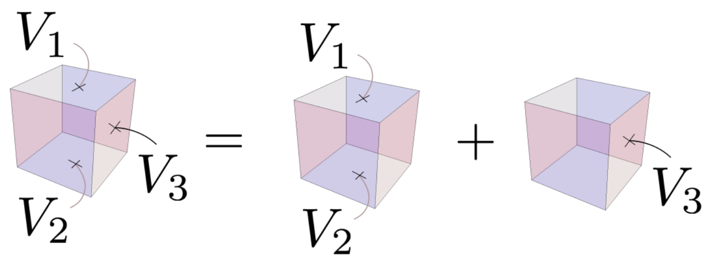
Si $V_1 = V_2 \Longrightarrow$ tiene que quedar una función par respecto a $z = a/2$, en la dirección z.

Si $V_1 = -V_2 \Longrightarrow$ tiene que quedar una función impar respecto a $z = a/2$ en la direccoón z.

*Nota: si cambiara el intervalo de interés, por ejemplo a $[a_1, a_2]$, basta con trasladar el sistema de coordenadas nuevamente al $[0, a = a_2 - a_1]$, o trasladar el argumento de las funciones base, esto es: $\sin[k_n(x - a_1)]$.

En general, el problema no se va a presentar preparado para que lo ataquemos directamente con la elección de las direcciones de la base, sino que vamos a tener que descomponerlo adecuadamente (usando superposición) en problemas de Laplace que podamos y sepamos resolver. Por ejemplo:

Problema 1: con condiciones de contorno menos triviales.



$$\Phi_{123} \quad = \quad \Phi_{12} \quad + \quad \Phi_3$$

Resolución de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho$$

A continuación (primera parte de la guía 2) vamos a resolver la ecuación de Poisson en problemas donde las cargas se puedan poner todas en superficies planas, o todas en superficies esféricas, o todas en superficies cilíndricas. De ese modo vamos a poder dividir recintos en regiones donde se cumpla Laplace, dejando tanto a las cargas prescritas como a los conductores en los contornos de las regiones, y aplicar separación de variables. En la segunda parte de la guía 2 (y en la guía 3 de medios materiales) vamos a usar, además, la función de Green que nos va a permitir resolver problemas con densidad de carga distribuida “de cualquier manera” y en volumen (que no se puede poner en superficies).