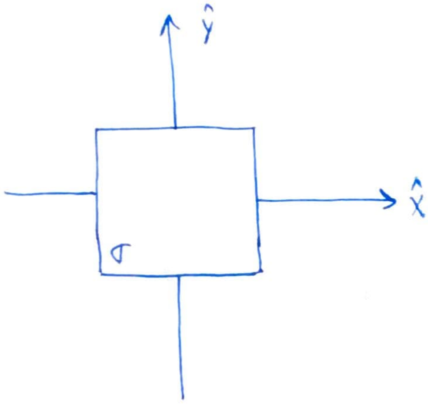
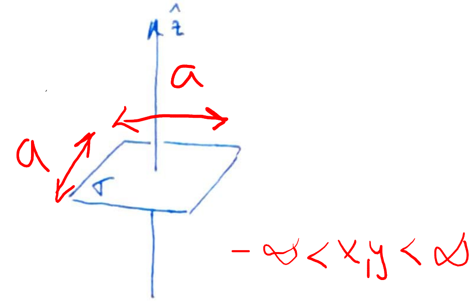
Problema 5:





Lo primero que hacemos en este tipo de problemas en volumenes no acotados es ver cuales son las direcciones que determinan el tipo de expansión del potencial Φ.

Recordar:

1) Direcciones donde anulamos Φ en dos puntos:
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) f_n$$
$$f_n = \frac{2}{a}\int_0^a dx \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) f(x)$$

2) Direcciones donde la variable recorre todo el eje:
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} \hat{f}(k)$$
$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x)$$

3) Direcciones donde la variable recorre sólo un semi-eje y al mismo tiempo debe anularse en su extremo:
$$f(x) = \int_0^{\infty} dk \sin kx\, \hat{f}(k)$$
$$\hat{f}(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dx \sin kx\, f(x)$$

En este problema notamos:

- en $z=0$ tenemos una $\sigma(x,y)$
- $\hat{x}$ e $\hat{y}$ se pueden recorrer libremente todo el eje $\Rightarrow$ 2)

Luego el potencial será:

quien es Z?

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x\, dk_y\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, Z_{k_x k_y}(z) ,$$

Recordar que todo viene de resolver Laplace: $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 u(x,y,z) = 0$

con $u(x,y,z) = X(x) Y(y) Z(z) \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$

y esto es sí y sólo si:

$$\left.\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= -\alpha \\ \frac{Y''}{Y} &= -\beta \\ \frac{Z''}{Z} &= -\gamma \end{aligned}\right\}$$

$\alpha + \beta + \gamma = 0$
$\downarrow \ \downarrow$
fijadas 2 ctes, queda la 3era determinada

- si $\alpha < 0 \to$ lineal $\to$ descartada
- si $\alpha = -w^2$ $(w>0) \to A\cosh(wx), B\sinh(wx)$ [ó e^{wx}, e^{-wx}]
- si $\alpha = w^2$ $(w>0) \to A\cos(wx)$, $B\sin(wx)$ [ó e^{-iwx}, e^{iwx}]

Volviendo al problema: $\gamma_{k_x k_y} = -(\alpha_{k_x} + \beta_{k_y}) = -(k_x^2 + k_y^2)$

En este caso tenemos:

$$\gamma_{k_x k_y} = -k_z^2 \quad \text{con } k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} > 0$$

$\Rightarrow$ en la dirección $\hat{z}$ tendremos $e^{k_z z}$ y $e^{-k_z z}$.

En función del semiespacio que estemos observando, sobrevivirá una o la otra:

- $z > 0$: $e^{-k_z z} \xrightarrow{z \to +\infty} 0$
- $z < 0$: $e^{k_z z} \xrightarrow[z \to -\infty]{} 0$

$$\Phi = \iint \cdots \begin{cases} A e^{-kz} & z \geq 0 \\ B e^{kz} & z \leq 0 \end{cases}$$

Pidiendo continuidad de Φ en $z=0$: $(A = B)$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \, e^{i(k_x x + k_y y)} A(k_x, k_y) e^{-k_z |z|}$$

$\downarrow$ de donde sale $A(k_x, k_y)$?

Hay que pedir la condición sobre el salto de la derivada:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0^-} - \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0^+} = 4\pi \underbrace{\sigma(x,y)}$$

hay que escribirlo en la misma base que $\Phi(\vec{r})$.

$$\Rightarrow \quad \sigma(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x\, dk_y\; e^{i(k_x x + k_y y)}\; \hat{\sigma}(k_x,k_y)$$

$$\hat{\sigma}(k_x,k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy\; e^{-i(k_x x + k_y y)}\; \sigma(x,y)$$

↑ por ahora no especificaremos la forma de σ.

usando la forma de $\Phi(\vec{r})$:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0^-} - \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0^+} = \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x\, dk_y\; e^{i(k_x x + k_y y)}\; 2k_z\, A(k_x,k_y)$$

$\parallel$

usando la forma de $\sigma(x,y)$:

$$4\pi\,\sigma(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x\, dk_y\; e^{i(k_x x + k_y y)}\; 4\pi\,\hat{\sigma}(k_x,k_y)$$

$$\Rightarrow \quad A(k_x,k_y) = \frac{2\pi\,\hat{\sigma}(k_x k_y)}{k_z}$$

∴ La solución de Poisson en todo el espacio con una distribución $\sigma(x,y)$ en $z=0$:

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty}\!\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x\, dk_y\; e^{i(k_x x + k_y y)}\; \frac{e^{-k_z|z|}}{k_z}\; \hat{\sigma}(k_x,k_y) \quad \text{con } k_z = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}}$$

Para finalizar el ejercicio, hay que calcular $\hat{\sigma}(k_x,k_y)$ dada $\sigma(x,y)$:

$$\hat{\sigma}(k_x,k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy\; e^{-i(k_x x + k_y y)}\,\sigma(x,y)$$

$$\sigma(x,y) = \sigma\,\Theta\left(x-\frac{a}{2}\right)\Theta\left(x+\frac{a}{2}\right)\Theta\left(y-\frac{a}{2}\right)\Theta\left(y+\frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} dx\,dy\; e^{-i(k_x x + k_y y)}\,\sigma$$

$$= \frac{\sigma}{(2\pi)^2}\underbrace{\left(\int_{-a/2}^{a/2} dx\, e^{-ik_x x}\right)}_{\frac{2}{k_x}\sin\left(\frac{k_x a}{2}\right)}\underbrace{\left(\int_{-a/2}^{a/2} dy\, e^{-ik_y y}\right)}_{\frac{2}{k_y}\sin\left(\frac{k_y a}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{2\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x\,dk_y\;\frac{e^{i(k_x x + k_y y)}\,e^{-|z|\sqrt{k_x^2+k_y^2}}}{k_x k_y\sqrt{k_x^2+k_y^2}}\sin\left(\frac{k_x a}{2}\right)\sin\left(\frac{k_y a}{2}\right)$$

Nota: dividiendo las integrales entre $-\infty$ y 0 y 0 y $+\infty$ debería verse que:

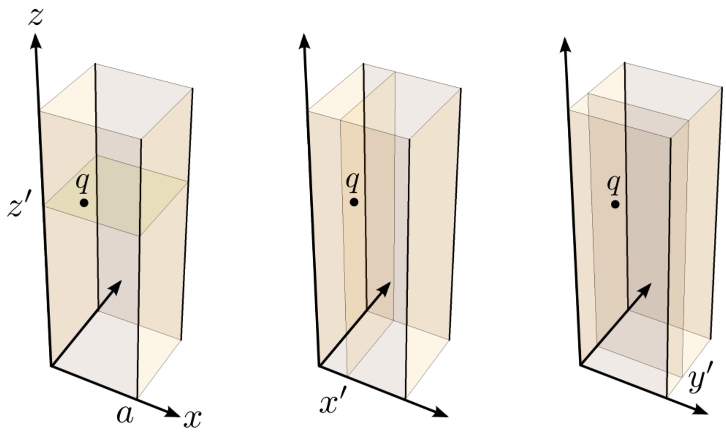
1) el potencial es real.

2) el potencial es par en x e y.

Queda de tarea ver que es:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{8\sigma}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} dk_x\,dk_y\;\frac{e^{-|z|(k_x^2+k_y^2)^{1/2}}}{k_x k_y\sqrt{k_x^2+k_y^2}}\sin\left(\frac{k_x a}{2}\right)\sin\left(\frac{k_y a}{2}\right)\cos(k_x x)\cos(k_y y)$$

Problema 8 :



- $-\infty < z < +\infty$ $\rightarrow$ ②
- $0 \leq y \leq a$
  $0 = \Phi(y=0) = \Phi(y=a)$
  $\rightarrow$ ①

Las paredes están a potencial 0. Existen 2 divisiones de zona. Aquí usaremos la primera: la caja se divide en dos cajas semi-infinitas en $z=z'$. Luego, la dirección $\hat{z}$ queda descartada como dirección relevante. Las direcciones relevantes son $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

Como en ambas direcciones se tienen que anular en 2 puntos $\Rightarrow$ 1)

Es decir, el desarrollo de Φ será en las bases $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ y $\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$.

Al igual que el problema 5, en $\hat{z}$ quedarán $e^{\pm wz}$ en $\hat{z}$. Pidiendo continuidad en $z=z'$ y que en $z\to\pm\infty$ se comporten adecuadamente:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) A_{nm}\, e^{-|z-z'|\,w_{nm}} \quad ; \quad \text{con } w_{nm} = \left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^{1/2}$$

A_{nm} proviene del salto en la derivada de Φ:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=z'^-} - \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=z'^+} = 4\pi\,\sigma_q(x,y)$$

Tenemos que escribir $\sigma_q(x,y)$ en la base del sin:

$$\sigma_q(x,y) = q\,\delta(x-x')\,\delta(y-y')$$

$$= \frac{4q}{a^2}\sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right)$$

ya que: $\sigma(x,y) = \sum_{nm=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\sigma_{nm}$

con $\sigma_{nm} = \frac{4}{a^2}\int_0^a\int_0^a dx\,dy\,\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\underbrace{q\,\delta(x-x')\delta(y-y')}_{\sigma(x,y)}$

volviendo al salto de la derivada de Φ:

$$2\omega_{nm}A_{nm} = \frac{16\pi q}{a^2}\sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{8q}{a}\sum_{nm=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)\right]\left[\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right)\right]\frac{e^{-\pi|z-z'|(n^2+m^2)^{1/2}/a}}{(n^2+m^2)^{1/2}}}$$

$$\Rightarrow G_D(\vec{r},\vec{r}') = \frac{\Phi(\vec{r})}{q}$$

Ahora usemos la segunda division de regiones, es decir:

Entonces la caja infinita queda dividida en 2 cajas infinitas de base rectangular. En ambas zonas, $\hat{z}$ se mueve libremente entre $-\infty$ y $+\infty$, esta será 1 dirección relevante. En la dirección $\hat{y}$, el potencial debe anularse en 2 puntos, luego, es la 2da dirección relevante.

Entonces,

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}dk\,e^{ikz}\,X_{mk}(x) \qquad \text{con} \begin{cases}\Phi(x=0)=0\\ \Phi(x=a)=0\end{cases}$$

recordar que $X''(x) + \alpha X(x) = 0$ con $\overset{\alpha}{\beta} = -\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + k^2\right] < 0$

$$\Rightarrow X_{mk}(x) \underset{x\leq x'}{=} A_m(k)e^{\omega_m(k)x} + B_m(k)e^{-\omega_m(k)x} \qquad \left(\text{con } \omega_m(k) = \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+k^2\right]^{1/2}\right)$$

$$X_{mk}(x) \underset{x\geq x'}{=} C_m(k)e^{\omega_m(k)x} + D_m(k)e^{-\omega_m(k)x}$$

Pidiendo $\Phi(x=0)=0$ y $\Phi(x=a)=0$: $(\omega \equiv \omega_m(k))$

$$X_{mk}(x) = 2A_m(k)\sinh(\omega x) \qquad 0\leq x\leq x'$$

$$X_{mk}(x) = 2E_m(k)\sinh[\omega(a-x)] \qquad x'\leq x\leq a \quad (E_m \equiv C_m e^{\omega a})$$

Falta pedir la continuidad de Φ en $x=x'$:

Para esto hay un truco que aliviana las cuentas y es considerar la redefinición de las constantes tal que el potencial sea continuo. Entonces:

$$2A_m(k) \longrightarrow A_m(k)\sinh[\omega(a-x')] \qquad 0\leq x\leq x'$$

$$2E_m(k) \longrightarrow A_m(k)\sinh(\omega x') \qquad x'\leq x\leq a$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = \sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}dk\, e^{ikz}A_m(k)\begin{cases}\sinh(\omega x)\sinh[\omega(a-x')] & 0\leq x\leq x'\\ \sinh(\omega x')\sinh[\omega(a-x)] & x'\leq x\leq a\end{cases}$$

Definiendo: $x_< \equiv \min\{x,x'\}$ y $x_> \equiv \max\{x,x'\}$

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}dk\, e^{ikz}A_m(k)\sinh(\omega x_<)\sinh[\omega(a-x_>)]$$

De donde sale $A_m(k)$? Del salto de la derivada de Φ:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=x'^-} - \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=x'^+} = 4\pi\sigma_q(y,z)$$

Nuevamente:

$$\sigma(y,z) = q\,\delta(y-y')\delta(z-z') = \sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}dk\, e^{ikz}\sigma_m(k)$$

$$\sigma_m(k) = \frac{2}{a}\int_0^a dy \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{2\pi}\, e^{-ikz}\,\sigma(y,z)$$

$$= \frac{q}{\pi a}\sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right)e^{-ikz'}$$

Luego de calcular la diferencia de derivadas:

$$A_m(k) = \frac{4q}{a}\,\frac{\sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right)e^{-ikz'}}{w_m(k)\sinh\left[w_m(k)a\right]}$$ (les dejo las cuentas)

Finalmente,

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{4q}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}dk\, e^{ik(z-z')}\,\frac{\sinh(wx_<)\sinh[w(a-x_>)]}{w\sinh(wa)}}$$

De nuevo, $G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{\Phi(\vec{r})}{q}$

Queda de tarea ver que:

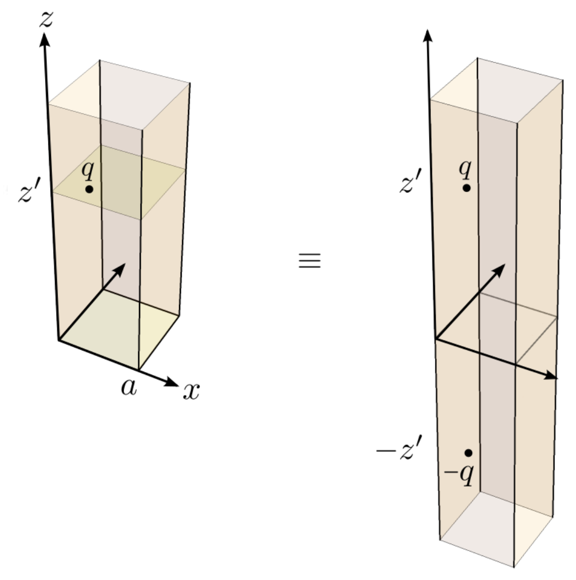
- $\Phi(\vec{r})$ es real
- $\Phi(\vec{r})$ es par respecto a z'.

Problema 7 :

Tenemos dos caminos posibles

- De manera análoga al problema 8, calculamos el potencial.
- Usamos el resultado del problema 8 y el método de imágenes

veamos brevemente el 2do método:



- En $z'>0$, hay una carga q.
- En $z=0$, el potencial está a cero.
- En $-z'<0$, colocamos una carga $-q$.

Deberíamos ver que en $z>0$ el problema es el buscado.

1) se cumplen las condiciones de contorno.

2) para $z>0$, las fuentes de la ec. de Poisson son las mismas.

Entonces en términos de la función de Green $G(\vec{r},\vec{r})$ de la caja infinita.

$$G_{semi}(\vec{r},\vec{r}\,') = G(\vec{r},\vec{r}\,') - G(\vec{r},\vec{r}\,'') \qquad \text{donde } \vec{r}\,'' = (x', y', z'(-1))$$

recordar que
$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{8\pi}{a^2}\sum_{nm=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)\right]\left[\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right)\right]\frac{e^{-w|z-z'|}}{w}$$

con $w = \frac{\pi}{a}(n^2+m^2)^{1/2}$

Restando ambas funciones:

$$e^{-w|z-z'|} - e^{-w|z+z'|} = \begin{cases} 2\sinh(wz)\, e^{-wz'} & 0 \leq z \leq z' \\ 2\sinh(wz')\, e^{-wz} & z' \leq z \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$|z+z'| > 0$$

Luego,

$$\boxed{G_{semi}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{16\pi}{a^2} \sum_{nm=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)\right]\left[\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right)\right] \times \frac{\sinh(w z_<)\, e^{-w z_>}}{w}}$$

$w_> \equiv \max\{z, z'\}$

$w_< \equiv \min\{z, z'\}$

Queda de tarea ver que:

- usar el metodo clásico y comparar soluciones !!