Clase práctica del 16/09 - Esféricas

- **Repaso muy rápido de Laplace y separación de variables en esféricas** (p. 1)
- Problemita simple y canónico (p. 7)

- Problema: G.2 – Ej.9 (p. 36)

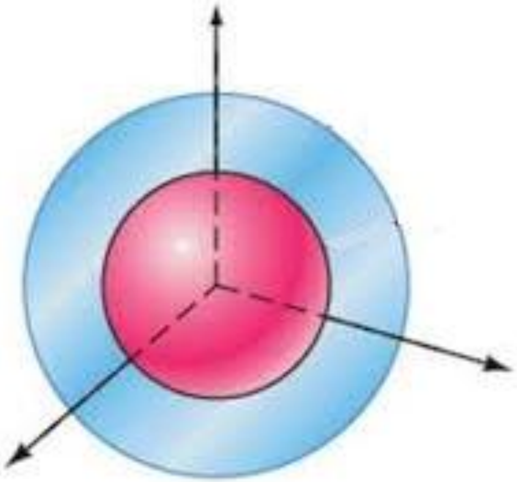
- Problema: G.2 – Ej.11 (p. 64)

No se asusten con la cantidad de páginas! Las diapos están repetidas

Separación de variables en coordenadas esféricas

Regiones descriptas según

- a<r | r<b | a<r<b
- $0 < \theta < \pi$
- $0 < \varphi < 2\pi$



$\nabla^2\phi = -4\pi\rho$

Poisson

Separamos en regiones sin cargas y resolvemos algo más fácil

$\boxed{\nabla^2\phi = 0}$

Laplace

Una vez que resolví *Laplace*, vuelvo al caso con fuentes (*Poisson*) a través de

$$\boxed{4\pi\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^-) - \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^+)} = (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$$

Ecuación y solución de Laplace en coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (3.1)$$

$$\nabla^2\phi = 0$$

$\phi = R(r)P(\theta)Q(\varphi)$ Ansatz: Propongo separación de variables

Ecuación en φ $$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = -m^2$$ $$Q(\varphi) = e^{im\varphi}$$

Ecuación en θ $$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P = 0$$ $$P(\theta) = P_l^m(\cos\theta)$$

Ecuación en r $$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dr^2}(rR) = l(l+1)$$ $$R(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$$

m entero por periodicidad!

En φ las soluciones son oscilatorias. Como estamos en la esfera completa, $m \in \mathbb{Z}$. Además $-l < m < l$

En θ, un amigo matemático me dice que las soluciones son P_l^m. Forman base

En r la solución no es una base!

El procedimiento es igual que en cartesianas, aislando términos constantes que nombré $c_1 = -m^2$ y $c_2 = l(l+1)$

Cómo se ve un polinomio de Legendre?

- Forman una base ortogonal (igual que sin, cos!) en $x \in [-1,1]$
- Son polinomios, en nuestra expansión del potencial los evaluamos en $x = \cos\theta$
- Cumple varias otras propiedades:

$$P_k(1) = 1$$

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$$

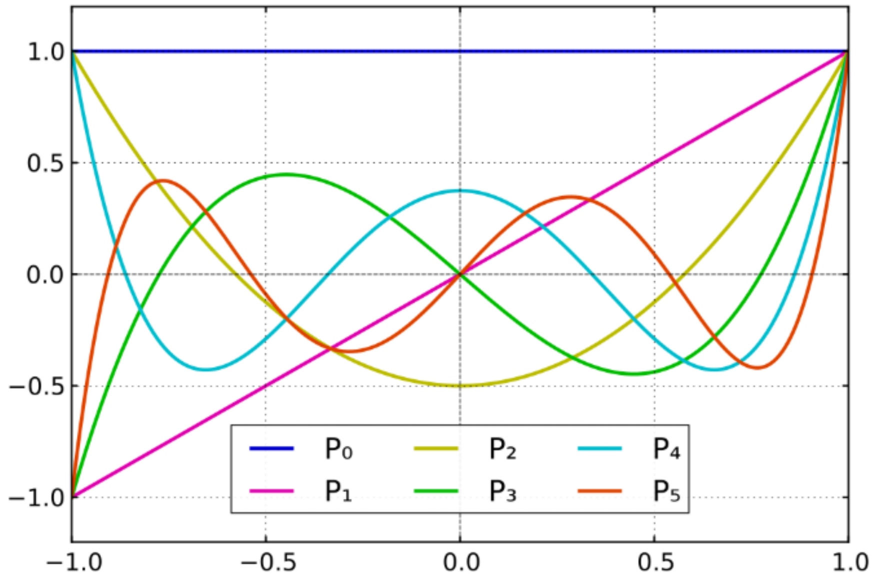
$$\frac{x^2-1}{n}\frac{d}{dx}P_n = xP_n - P_{n-1}$$

- Para $m \neq 0$ se construyen a partir de los anteriores y no son polinomios

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m\,(1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{dx^m}\,(P_\ell(x))$$

Ejemplo: Algunos polinomios de Legendre

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$



Armónicos esféricos

Ejemplo: Algunos armónicos esféricos

Spherical harmonics $Y_{lm}(\theta, \phi)$

$$l = 0 \qquad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l = 1 \qquad \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \\ Y_{10} = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}} \cos\theta \end{cases}$$

$$l = 2 \qquad \begin{cases} Y_{22} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi} \\ Y_{21} = -\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi} \\ Y_{20} = \sqrt{\dfrac{5}{4\pi}} \left(\dfrac{3}{2}\cos^2\theta - \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$l = 3 \qquad \begin{cases} Y_{33} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{35}{4\pi}} \sin^3\theta e^{3i\phi} \\ Y_{32} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{105}{2\pi}} \sin^2\theta \cos\theta e^{2i\phi} \\ Y_{31} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{21}{4\pi}} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1) e^{i\phi} \end{cases}$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi) \tag{3.54}$$

Algunas cosas que recordar

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad (3.61)$$

Solución general de la ecuación de Laplace (región libre de cargas) en un dominio $a < r < b$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, Y^*_{l'm'}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{l'l}\delta_{m'm} \qquad (3.55)$$

Ortogonalidad de Y_{lm}

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\underline{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \qquad (3.53)$$

Ojo el factor! Relación entre Y_{lm} y P_l

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta) \qquad (3.33)$$

Solución general de la ecuación de Laplace (región libre de cargas) en un dominio $a < r < b$ con simetría en φ.

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}(x) P_l(x) \, dx = \underline{\frac{2}{2l+1}} \delta_{l'l} \qquad (3.21)$$

Ortogonalidad de P_l. Ojo con el factor! No están normalizados.

Clase práctica del 16/09 - Esféricas

- Repaso muy rápido de Laplace y separación de variables en esféricas
- **Problemita simple y canónico**

- Problema: G.2 – Ej.9

- Problema: G.2 – Ej.11

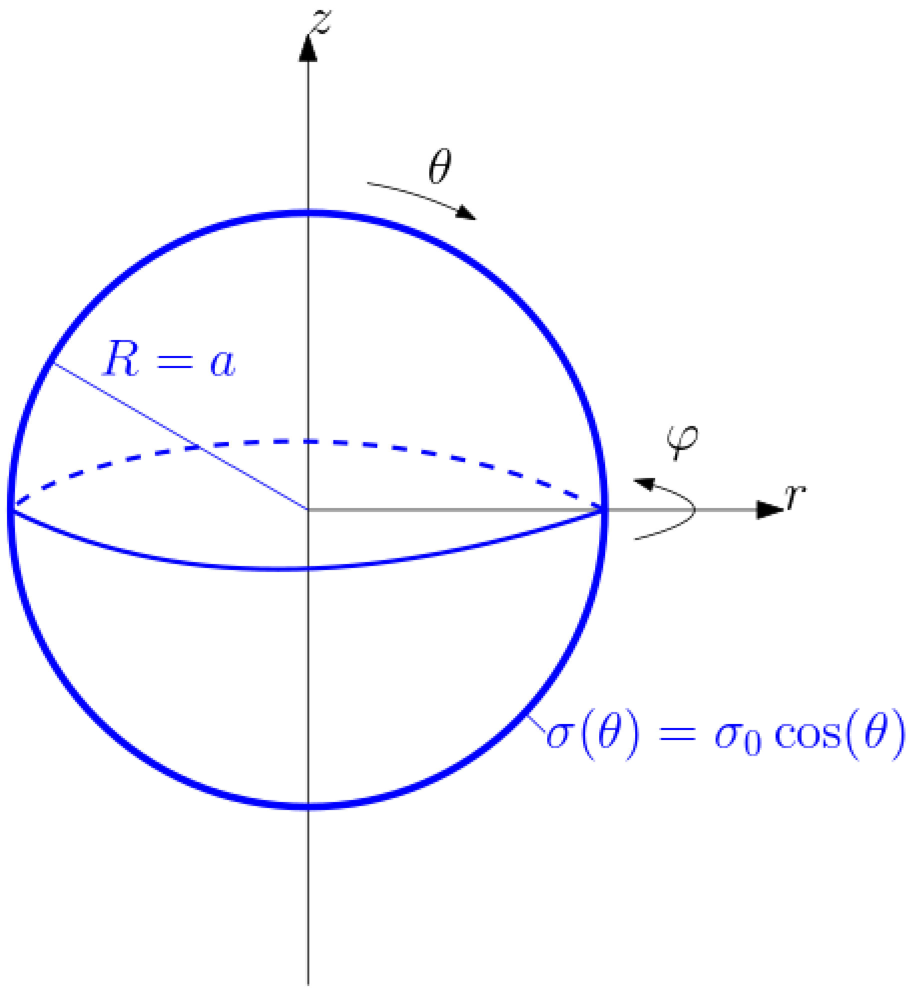
Ejemplo de separación en esféricas

Problema: Hallar el potencial $\phi(\boldsymbol{r})$ en todo el espacio. Cascarón esférico cargado con $\sigma(\theta)$

Ejemplo de separación en esféricas

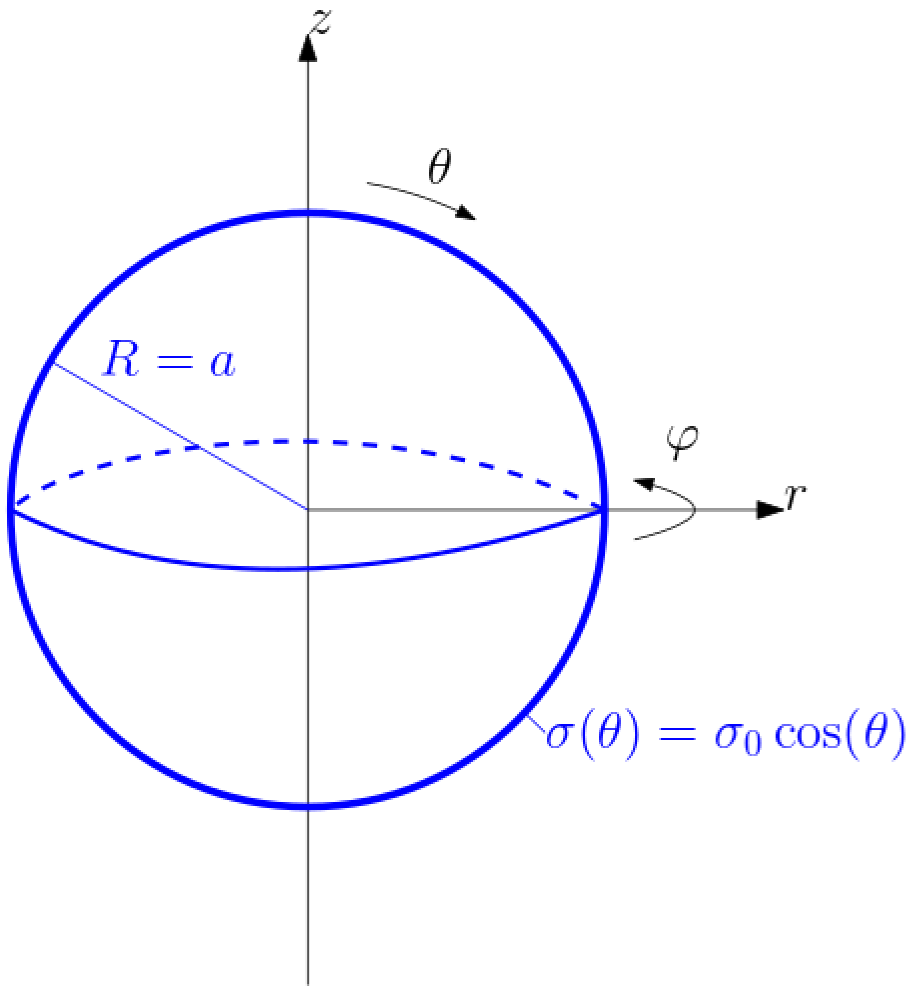
Problema: Hallar el potencial $\phi(\boldsymbol{r})$ en todo el espacio. Cascarón esférico cargado con $\sigma(\theta)$

Estrategia:



Ejemplo de separación en esféricas

Problema: Hallar el potencial $\phi(\boldsymbol{r})$ en todo el espacio. Cascarón esférico cargado con $\sigma(\theta)$

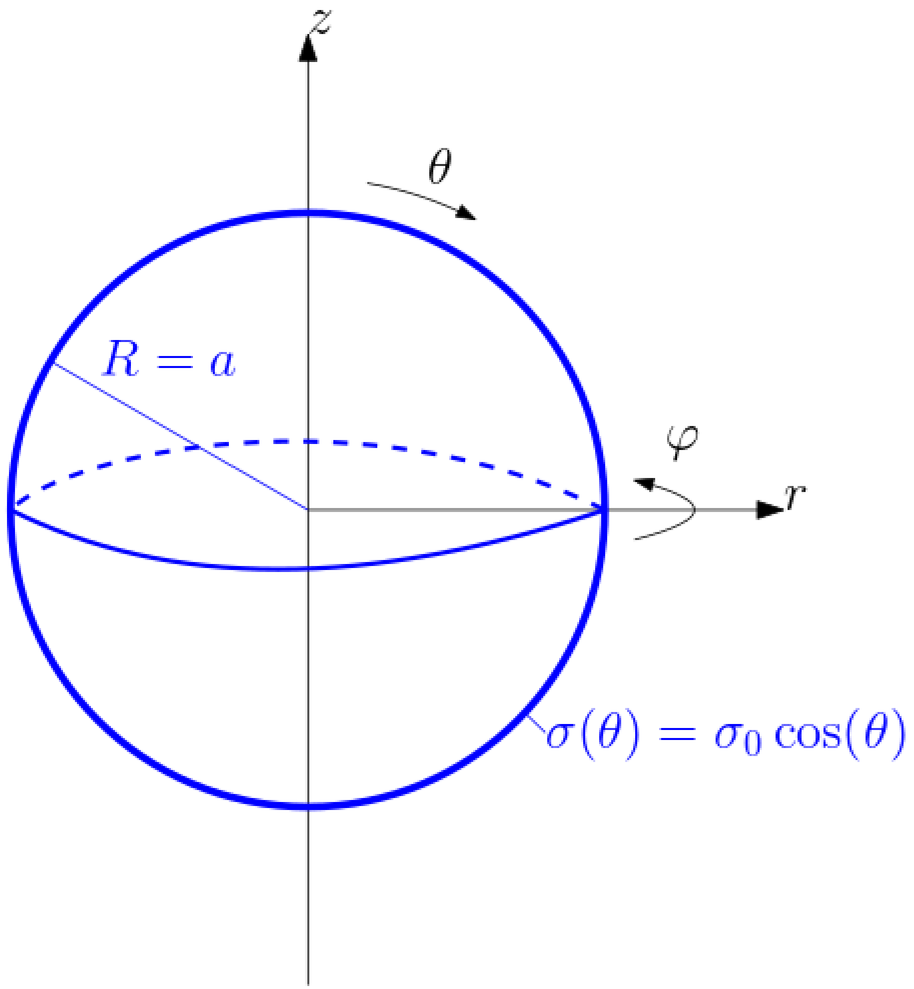


Estrategia:

- Divido en regiones:
  I. $r < a$
  II. $r > a$
- Para cada región escribo la solución de Laplace en esféricas

Ejemplo de separación en esféricas

Problema: Hallar el potencial $\phi(\boldsymbol{r})$ en todo el espacio. Cascarón esférico cargado con $\sigma(\theta)$



Estrategia:

- Divido en regiones:
  I. $r < a$
  II. $r > a$
- Para cada región escribo la solución de Laplace en esféricas
- En este problema además voy a aprovechar la simetría en φ

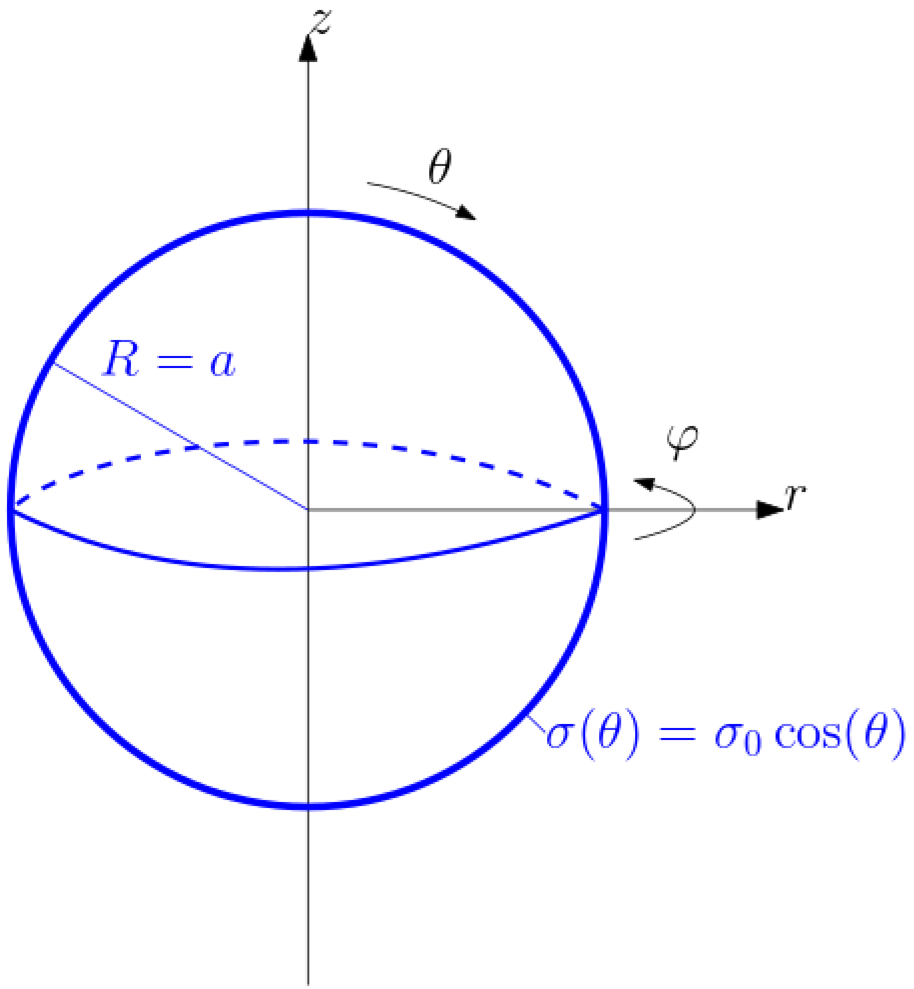
Ejemplo de separación en esféricas

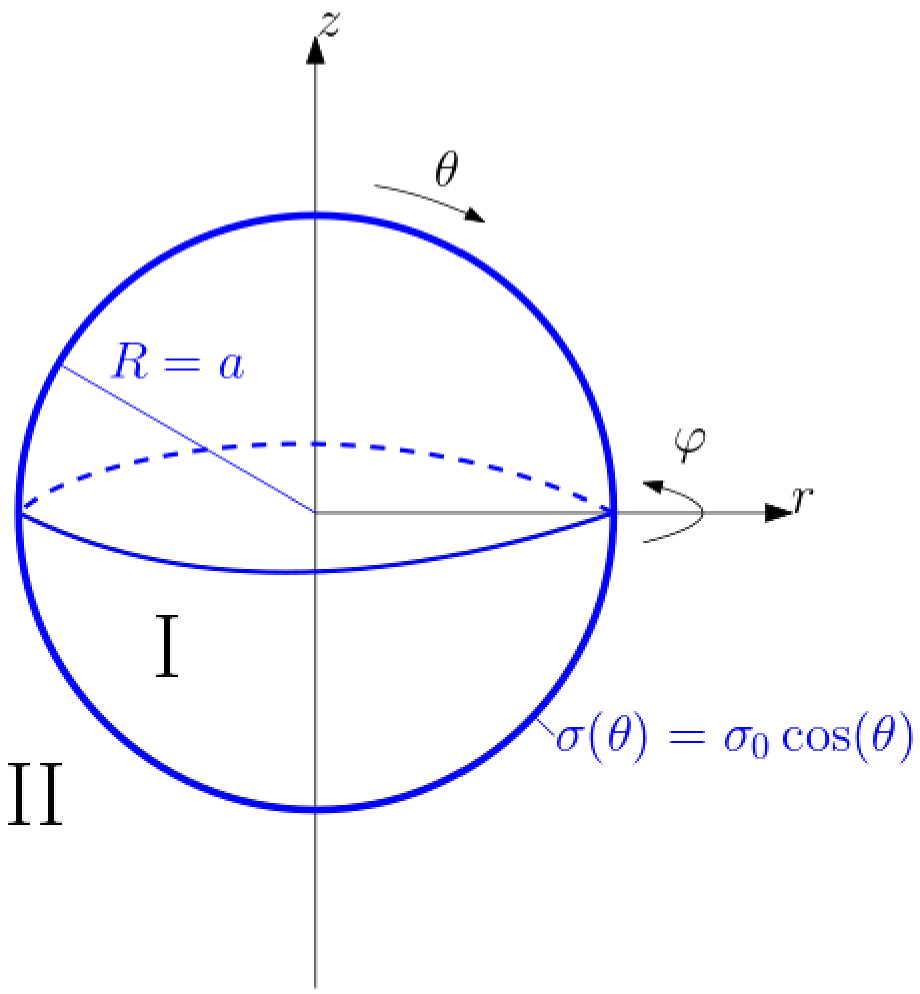
Problema: Hallar el potencial $\phi(\boldsymbol{r})$ en todo el espacio. Cascarón esférico cargado con $\sigma(\theta)$

Estrategia:

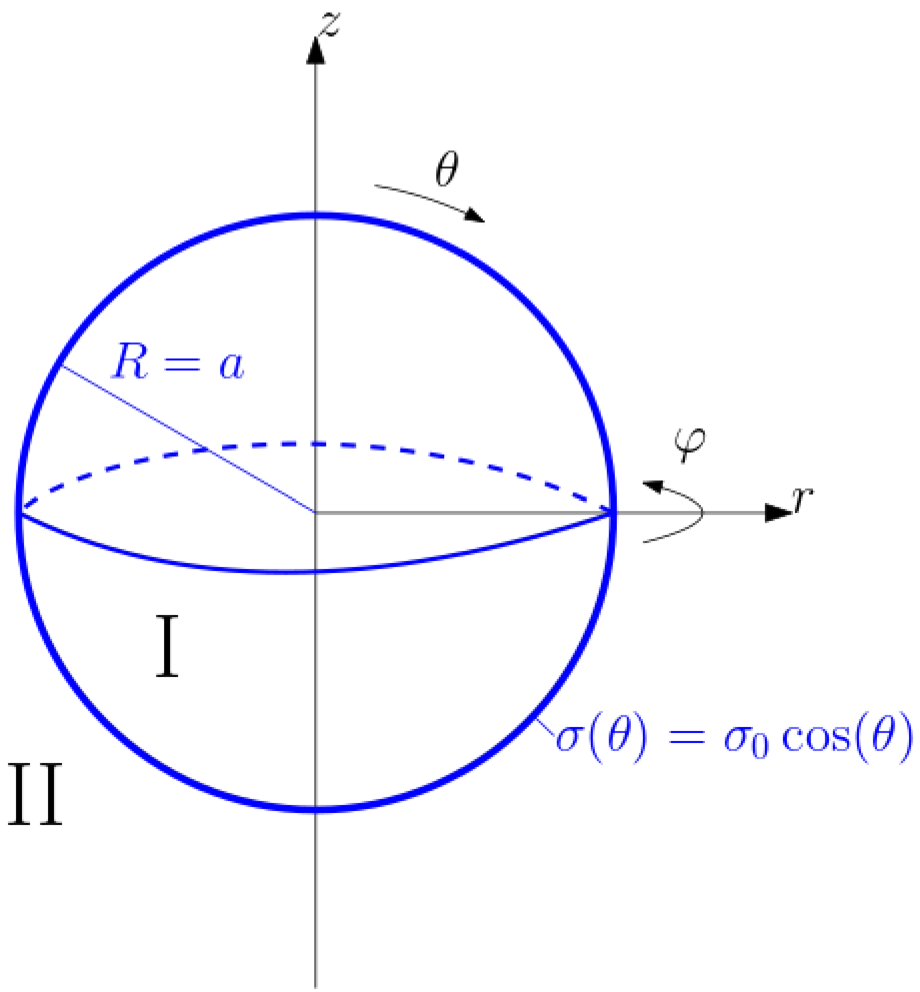
- Divido en regiones:
  I. $r < a$
  II. $r > a$
- Para cada región escribo la solución de Laplace en esféricas
- En este problema además voy a aprovechar la simetría en φ
- Planteo condiciones de contorno y empalme

Misma metodología que en cartesianas!





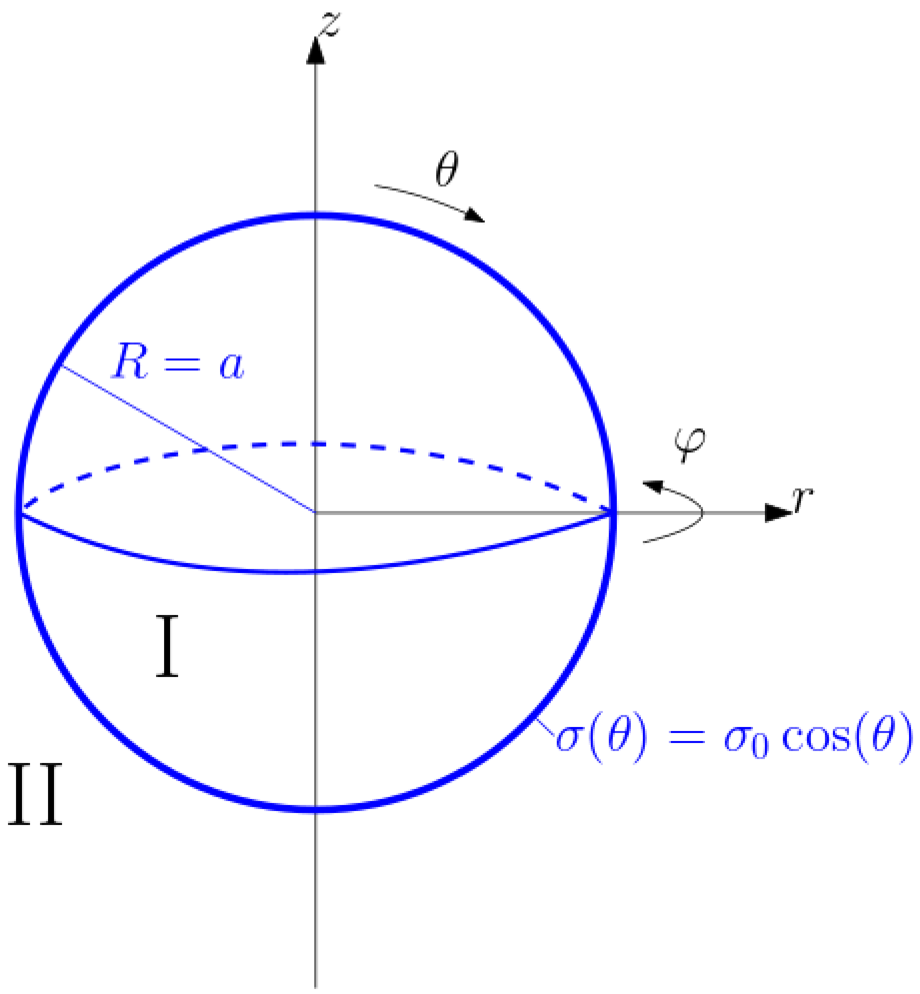
$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{lm}\left(A_{lm}r^{l} + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ r < a \\ \displaystyle\sum_{lm}\left(C_{lm}r^{l} + \frac{D_{lm}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ a < r \end{cases}$$



$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_l \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\; r < a \\ \sum_l \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\; r > a \end{cases}$$

Simplifico usando
la simetría en φ

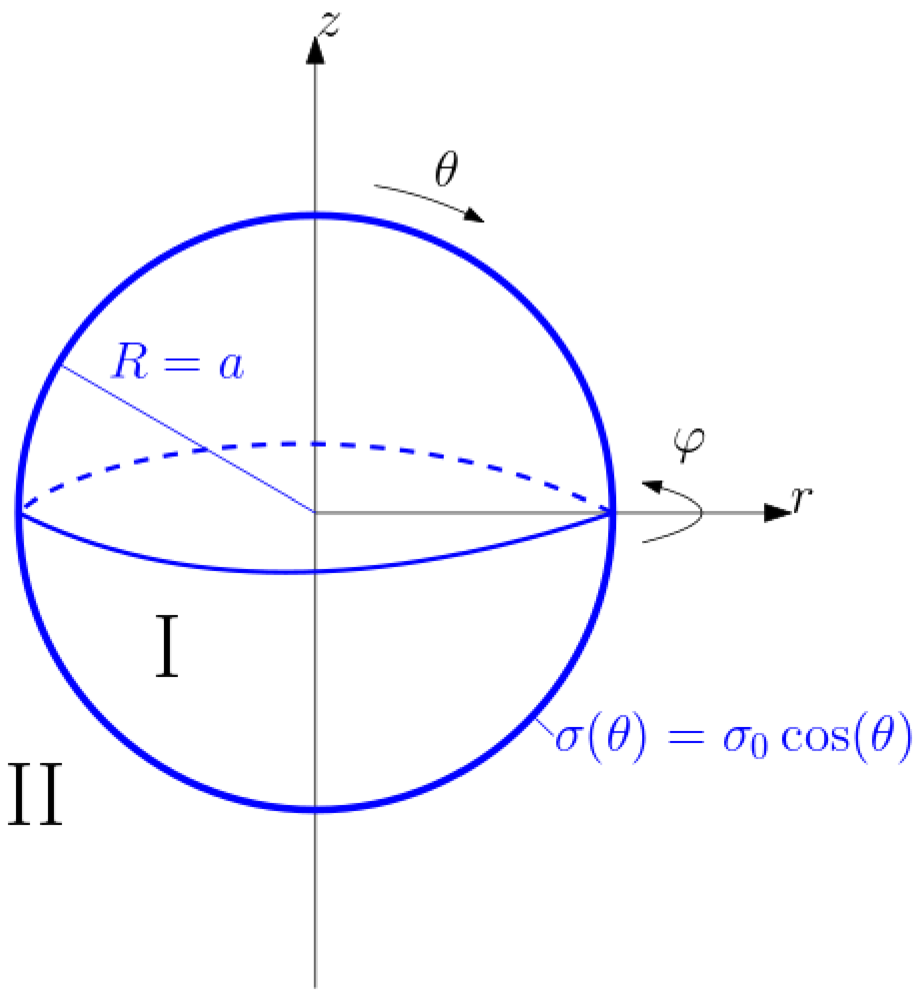
Ahora falta imponer condiciones de contorno/empalme



$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_l \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\; r < a \\ \sum_l \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\; r > a \end{cases}$$

Ahora falta imponer condiciones de contorno/empalme

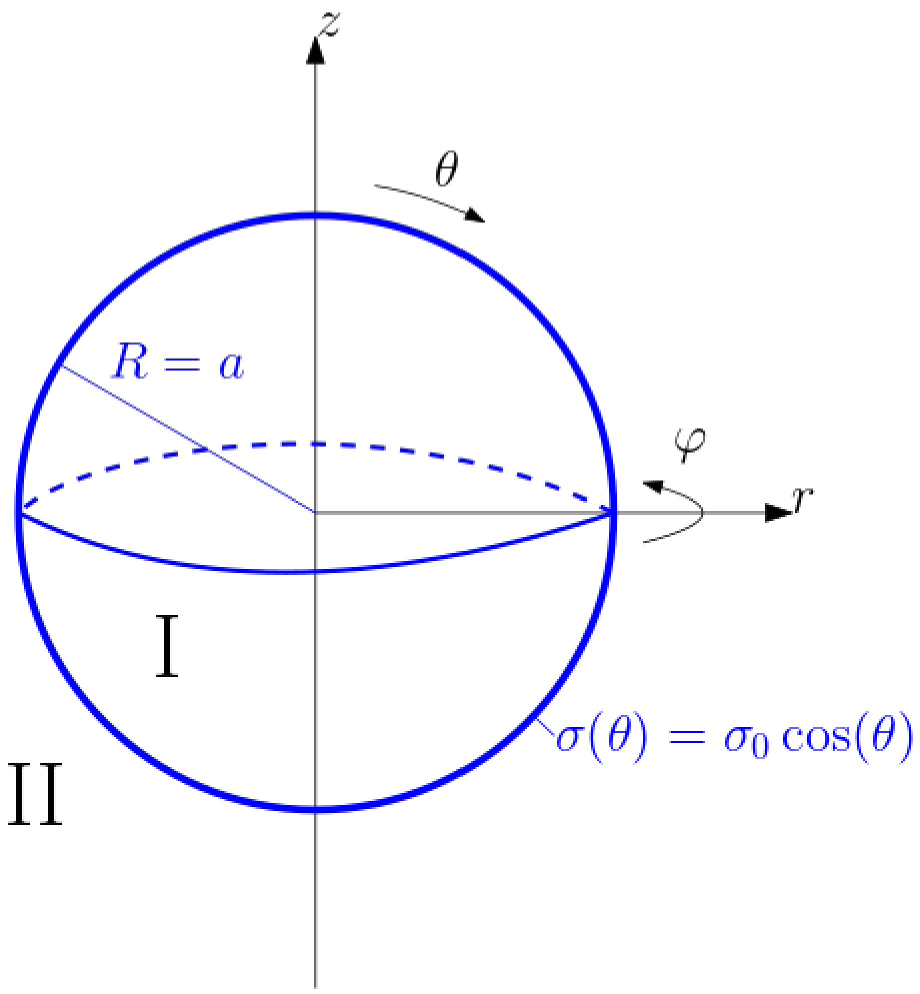
- $|\phi| < \infty \quad$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \rightarrow 0 \quad$ si $r \longrightarrow \infty$



$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_l \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\ r < a \\ \sum_l \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\ r > a \end{cases}$$

Ahora falta imponer condiciones de contorno/empalme

- $|\phi| < \infty \quad$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \to 0 \quad$ si $r \longrightarrow \infty$
- $\phi(a^-) = \phi(a^+)$



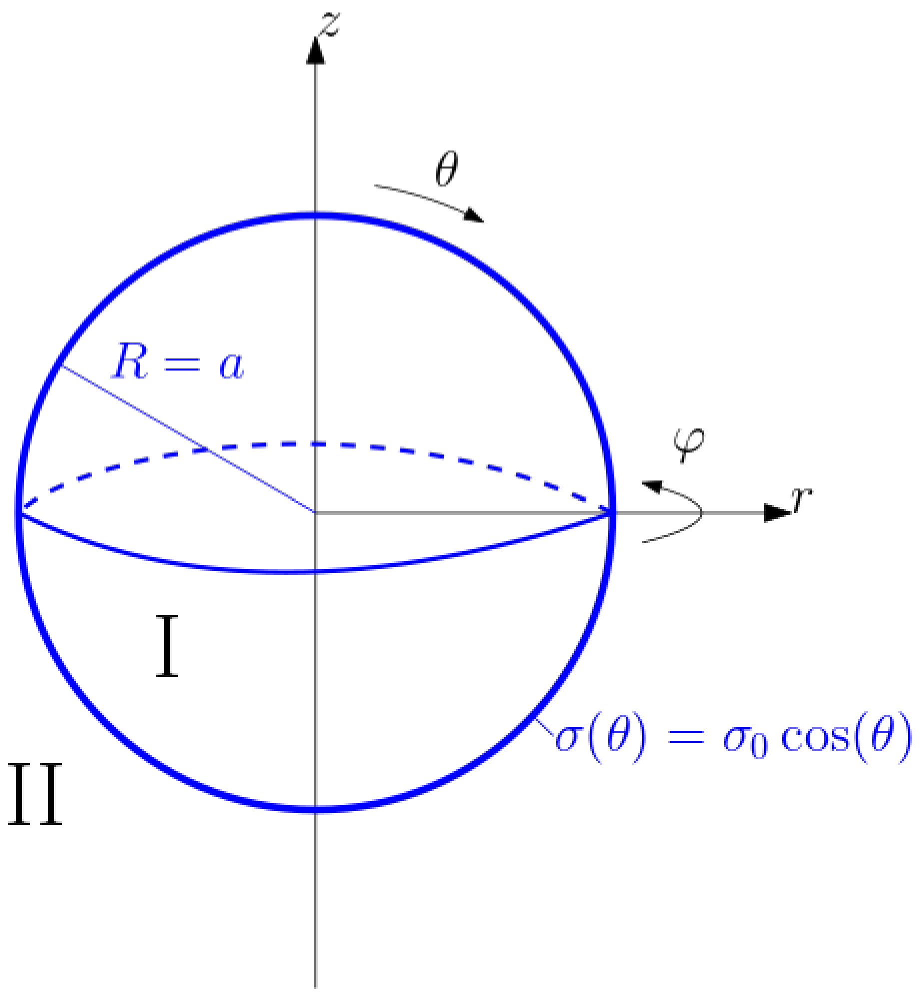
$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_l \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\ r < a \\ \sum_l \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\ r > a \end{cases}$$

Ahora falta imponer condiciones de contorno/empalme

- $|\phi| < \infty \quad$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \to 0 \quad$ si $r \longrightarrow \infty$
- $\phi(a^-) = \phi(a^+)$
- $\frac{\partial\phi}{\partial r}(a^-) - \frac{\partial\phi}{\partial r}(a^+) = 4\pi\sigma$

Notación

$r_< = \min\{a, r\}$
$r_> = \max\{a, r\}$
$a^{\pm} = \lim_{r \longrightarrow a^{\pm}} r$



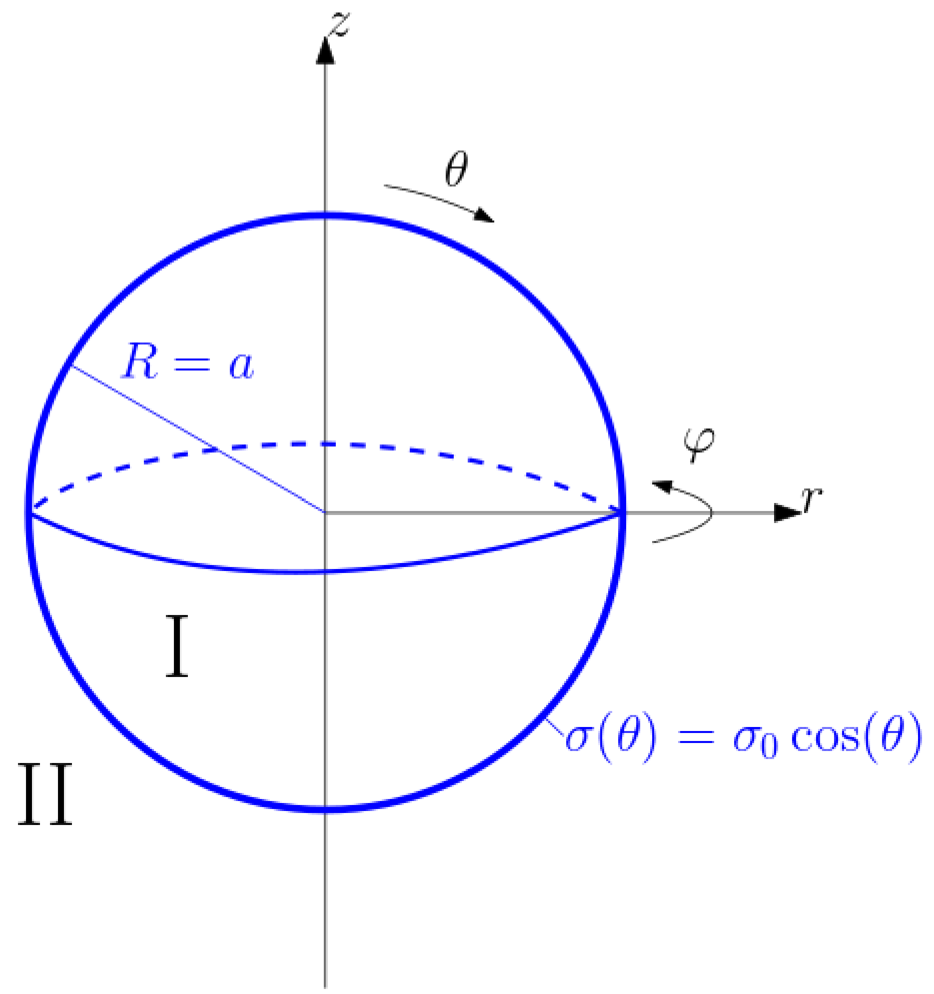
$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_l \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\ r < a \\ \sum_l \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\ r > a \end{cases}$$

Condiciones de contorno/empalme

- $|\phi| < \infty \quad$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \to 0 \quad$ si $r \longrightarrow \infty$
- $\phi(a^-) = \phi(a^+)$
- $\frac{\partial \phi}{\partial r}(a^-) - \frac{\partial \phi}{\partial r}(a^+) = 4\pi\sigma$

Notación

$r_< = \min\{a, r\}$
$r_> = \max\{a, r\}$
$a^\pm = \lim_{r \longrightarrow a^\pm} r$



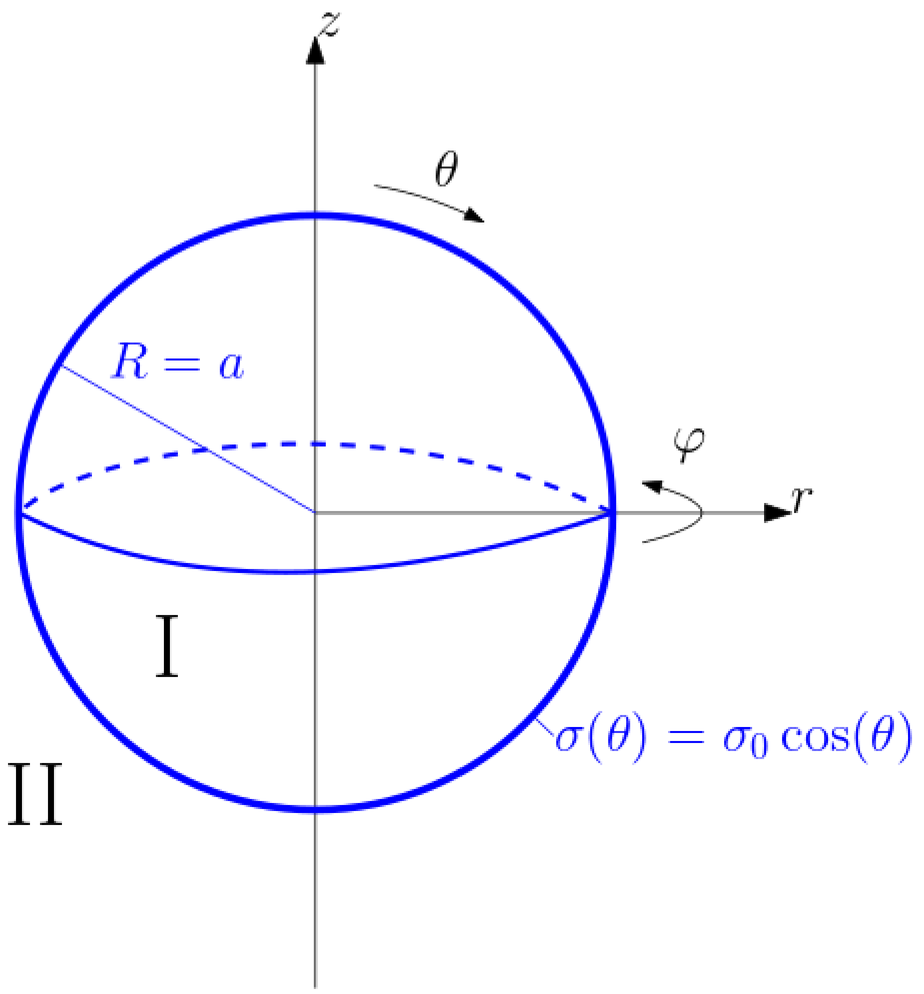
$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_l \left(A_l r^l + \cancel{\frac{B_l}{r^{l+1}}}\right) P_l(cos\theta) & si\ r < a \\ \sum_l \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\ r > a \end{cases}$$

Condiciones de contorno/empalme

- $|\phi| < \infty \quad$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \rightarrow 0 \quad$ si $r \longrightarrow \infty$
- $\phi(a^-) = \phi(a^+)$
- $\frac{\partial \phi}{\partial r}(a^-) - \frac{\partial \phi}{\partial r}(a^+) = 4\pi\sigma$

Notación

$r_< = \min\{a, r\}$
$r_> = \max\{a, r\}$
$a^\pm = \lim_{r \longrightarrow a^\pm} r$



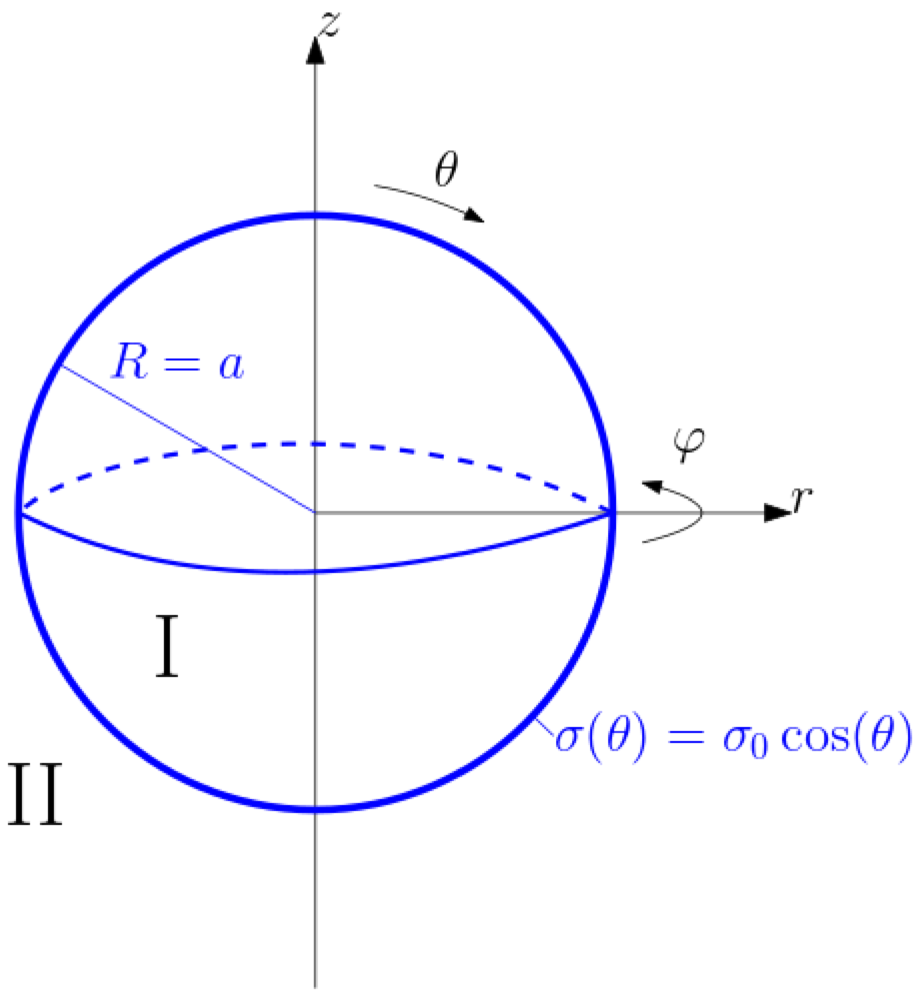
$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_l \left(A_l r^l + \frac{\cancel{B_l}}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\ r < a \\ \sum_l \left(\cancel{C_l} r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & si\ r > a \end{cases}$$

Condiciones de contorno/empalme

- $|\phi| < \infty \quad$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \to 0 \quad$ si $r \longrightarrow \infty$
- $\phi(a^-) = \phi(a^+)$
- $\dfrac{\partial\phi}{\partial r}(a^-) - \dfrac{\partial\phi}{\partial r}(a^+) = 4\pi\sigma$

Notación

$r_< = \min\{a, r\}$
$r_> = \max\{a, r\}$
$a^\pm = \lim_{r \longrightarrow a^\pm} r$



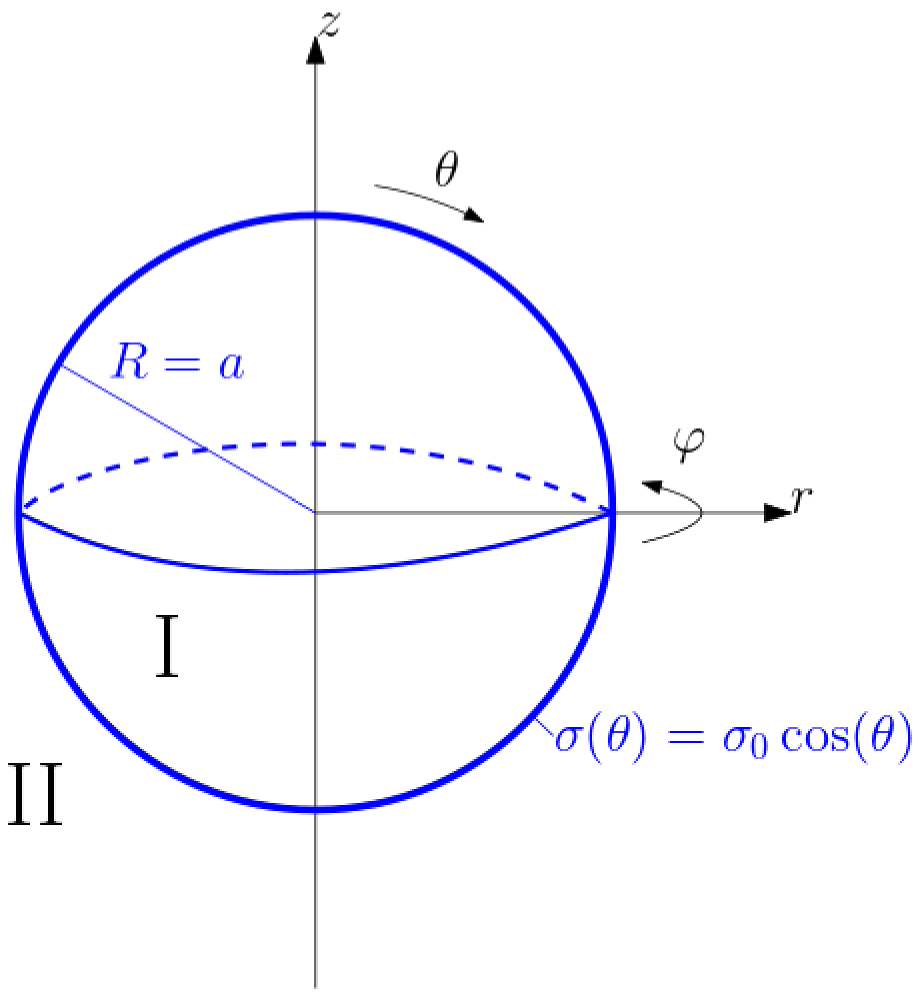
$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_l A_l r^l \, P_l(cos\theta) & si\ r < a \\ \sum_l \dfrac{D_l}{r^{l+1}} \, P_l(cos\theta) & si\ r > a \end{cases}$$

Condiciones de contorno/empalme

- $|\phi| < \infty \quad$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \to 0 \quad$ si $r \longrightarrow \infty$
- $\phi(a^-) = \phi(a^+)$
- $\frac{\partial\phi}{\partial r}(a^-) - \frac{\partial\phi}{\partial r}(a^+) = 4\pi\sigma$

Notación

$$r_< = \min\{a, r\}$$
$$r_> = \max\{a, r\}$$
$$a^\pm = \lim_{r\to a^\pm} r$$



$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_l A_l r^l \, P_l(cos\theta) & si\ r < a \\ \sum_l \frac{D_l}{r^{l+1}} \, P_l(cos\theta) & si\ r > a \end{cases} = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Haciendo esto redefiní A_l, i.e. no es el mismo que antes.
(si quisiera ser extremadamente prolijo debería haberlo llamado por ejemplo F_l)

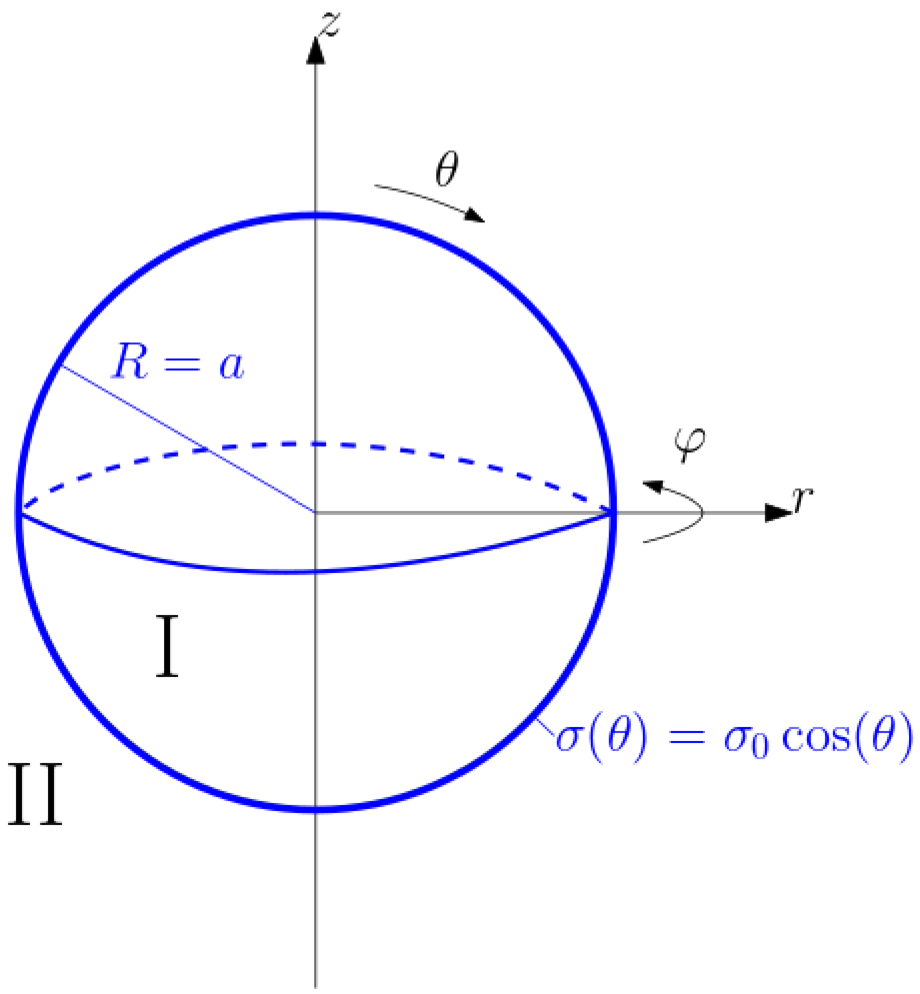
Condiciones de contorno/empalme

- $|\phi| < \infty \quad$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \to 0 \quad$ si $r \longrightarrow \infty$
- $\phi(a^-) = \phi(a^+)$
- $\frac{\partial \phi}{\partial r}(a^-) - \frac{\partial \phi}{\partial r}(a^+) = 4\pi\sigma$

Falta el salto del campo eléctrico

Notación

$r_< = \min\{a, r\}$
$r_> = \max\{a, r\}$
$a^\pm = \lim_{r \longrightarrow a^\pm} r$



$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(a^-) - \frac{\partial \phi}{\partial r}(a^+) = 4\pi\sigma$$

Y queremos imponer el salto del campo eléctrico

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_{l} \; A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_{l} \; A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

Escribo explícitamente
el salto

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

Escribo explícitamente
$r_<$ y $r_>$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l \; A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l \; A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l \; A_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l \; A_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\left[\sum_l \; l A_l \frac{r^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} + \left[\sum_l \; (l+1) A_l \frac{a^l}{r^{l+2}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\left[\sum_l lA_l \frac{r^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} + \left[\sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{r^{l+2}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l lA_l \frac{a^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta)) + \sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{a^{l+2}} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\left[\sum_l lA_l \frac{r^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} + \left[\sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{r^{l+2}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l lA_l \frac{a^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta)) + \sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{a^{l+2}} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = 4\pi\sigma_0 x$$

Renombro la variable
$x = \cos(\theta)$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

$$\left[\sum_l lA_l \frac{r^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} + \left[\sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{r^{l+2}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

$$\sum_l lA_l \frac{a^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta)) + \sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{a^{l+2}} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = 4\pi\sigma_0 x$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) 4\pi\sigma_0 x$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\left[\sum_l lA_l \frac{r^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} + \left[\sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{r^{l+2}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l lA_l \frac{a^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta)) + \sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{a^{l+2}} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = 4\pi\sigma_0 x$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) 4\pi\sigma_0 x$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) 4\pi\sigma_0 P_1(x)$$

Reconozco la relación
de ortogonalidad

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\left[\sum_l lA_l \frac{r^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} + \left[\sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{r^{l+2}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l lA_l \frac{a^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta)) + \sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{a^{l+2}} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = 4\pi\sigma_0 x$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) 4\pi\sigma_0 x$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) 4\pi\sigma_0 P_1(x)$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)P_l(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{l'l}}$$

$$\sum_l \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} = \frac{2}{2.1+1}\delta_{1,l'} 4\pi\sigma_0$$

Uso la relación de ortogonalidad

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\left[\sum_l lA_l \frac{r^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} + \left[\sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{r^{l+2}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l lA_l \frac{a^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta)) + \sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{a^{l+2}} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = 4\pi\sigma_0 x$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) 4\pi\sigma_0 x$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) 4\pi\sigma_0 P_1(x)$$

$$\sum_l \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} = \frac{2}{2.1+1}\delta_{1,l'} 4\pi\sigma_0$$

$$2A_{l'}\frac{1}{a^2} = \frac{2}{3}\delta_{1,l'}4\pi\sigma_0$$

$\sum_l(\ldots\delta_{l,l'}\ldots)$ quiere decir:
dejá el sumando igual,
reemplazando $l \to l'$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\left[\sum_l lA_l \frac{r^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} + \left[\sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{r^{l+2}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l lA_l \frac{a^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta)) + \sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{a^{l+2}} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0 \cos(\theta)$$

$$\begin{cases} A_{l'} = \frac{4\pi}{3} a^2 \sigma_0 & \text{si} \;\; l' = 1 \\ A_{l'} = 0 & \text{si} \;\; l' \neq 1 \end{cases}$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = 4\pi\sigma_0 x$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx \; P_{l'}(x)(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = \int_{-1}^{1} dx \; P_{l'}(x) 4\pi\sigma_0 x$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx \; P_{l'}(x)(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = \int_{-1}^{1} dx \; P_{l'}(x) 4\pi\sigma_0 P_1(x)$$

$$\sum_l \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} (2l+1) A_l \frac{1}{a^2} = \frac{2}{2.1+1} \delta_{1,l'} 4\pi\sigma_0$$

$$2A_{l'} \frac{1}{a^2} = \frac{2}{3} \delta_{1,l'} 4\pi\sigma_0$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} - \frac{d}{dr}\left[\sum_l A_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

$$\left[\sum_l lA_l \frac{r^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^-} + \left[\sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{r^{l+2}} P_l(cos(\theta))\right]_{r=a^+} = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

$$\sum_l lA_l \frac{a^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(cos(\theta)) + \sum_l (l+1)A_l \frac{a^l}{a^{l+2}} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(cos(\theta)) = 4\pi\sigma_0\cos(\theta)$$

$$\sum_l (2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = 4\pi\sigma_0 x$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) 4\pi\sigma_0 x$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} P_l(x) = \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) 4\pi\sigma_0 P_1(x)$$

$$\sum_l \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}(2l+1)A_l \frac{1}{a^2} = \frac{2}{2.1+1}\delta_{1,l'} 4\pi\sigma_0$$

$$2A_{l'}\frac{1}{a^2} = \frac{2}{3}\delta_{1,l'}4\pi\sigma_0$$

$$\begin{cases} A_{l'} = \frac{4\pi}{3}a^2\sigma_0 & \text{si } l' = 1 \\ A_{l'} = 0 & \text{si } l' \neq 1 \end{cases}$$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

$$\boxed{\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{4\pi a^2\sigma_0}{3}\frac{r_<}{r_>^2} P_1(\cos(\theta))}$$

Clase práctica del 16/09 - Esféricas

- Repaso muy rápido de Laplace y separación de variables en esféricas
- Problemita simple y canónico

- **Problema: G.2 – Ej.9**

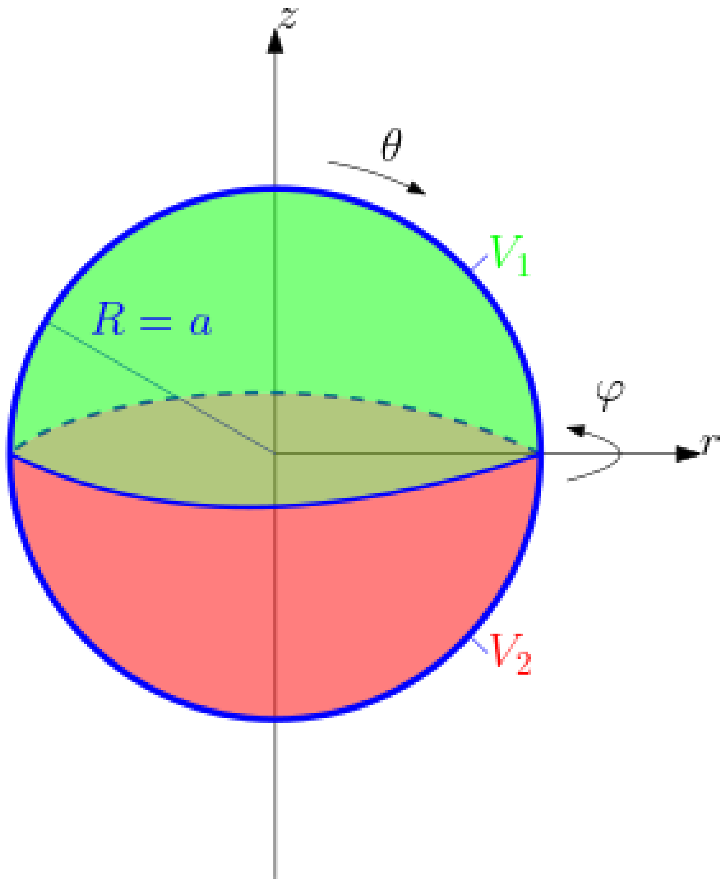
- Problema: G.2 – Ej.11

Problema 9 de la guía

9. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2. Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.

9. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2. Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.

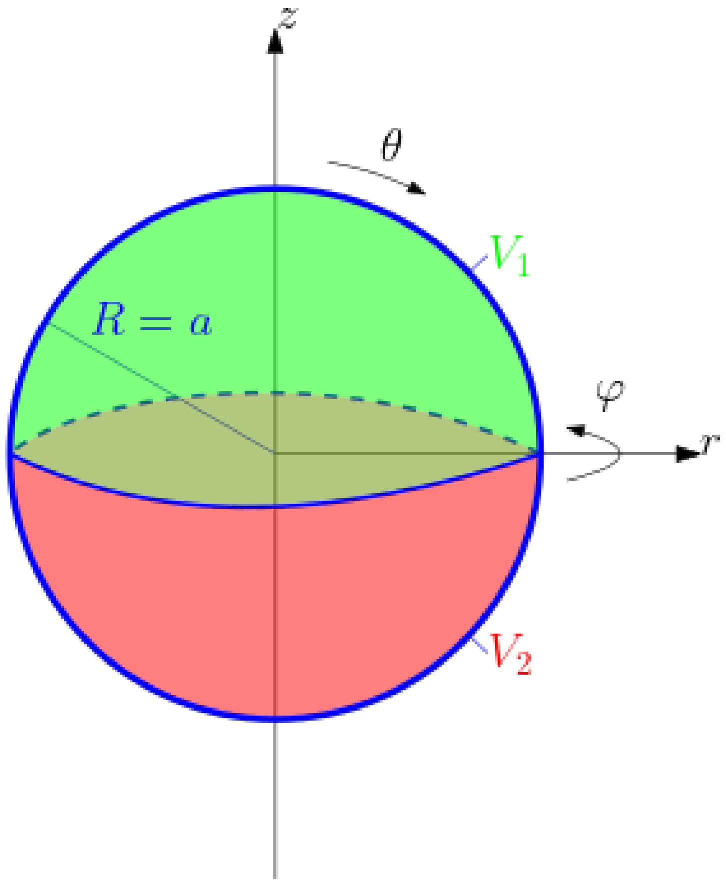
Estrategia:



9. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2. Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.

Estrategia:

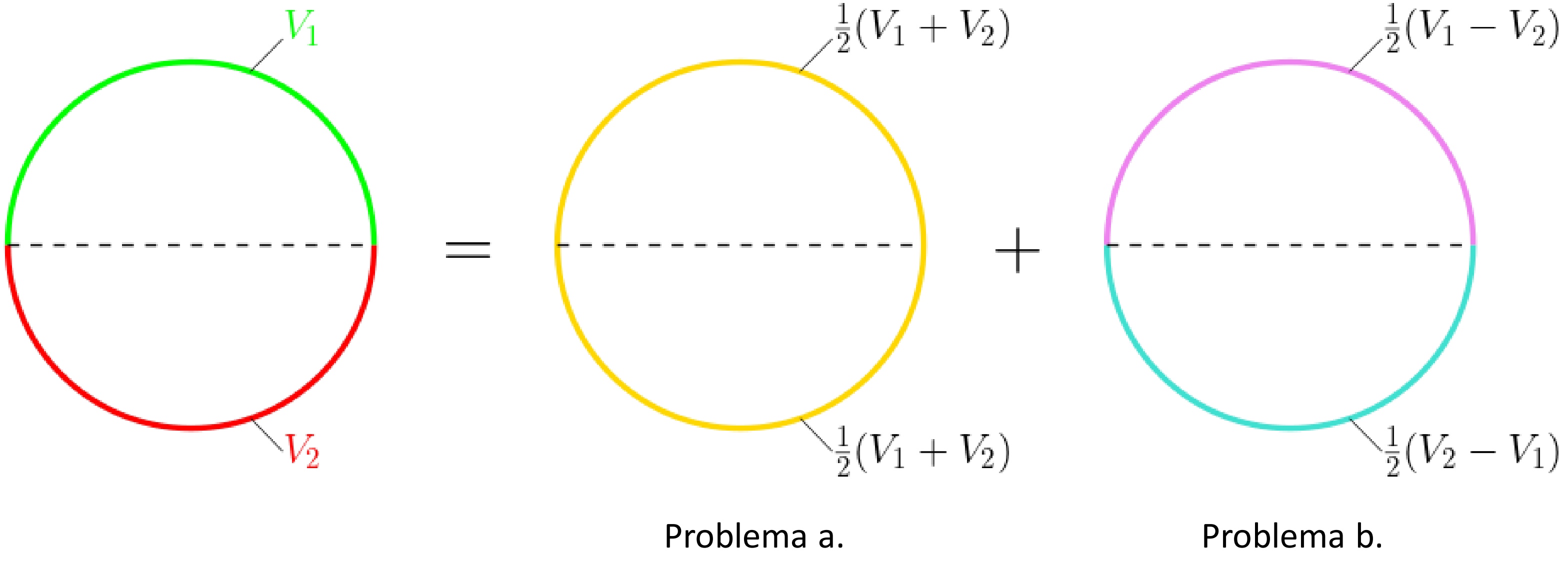
- Las condiciones de contorno definen dos problemas **independientes** entre sí *afuera* y *adentro* de la esfera



9. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2. Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.

Estrategia:

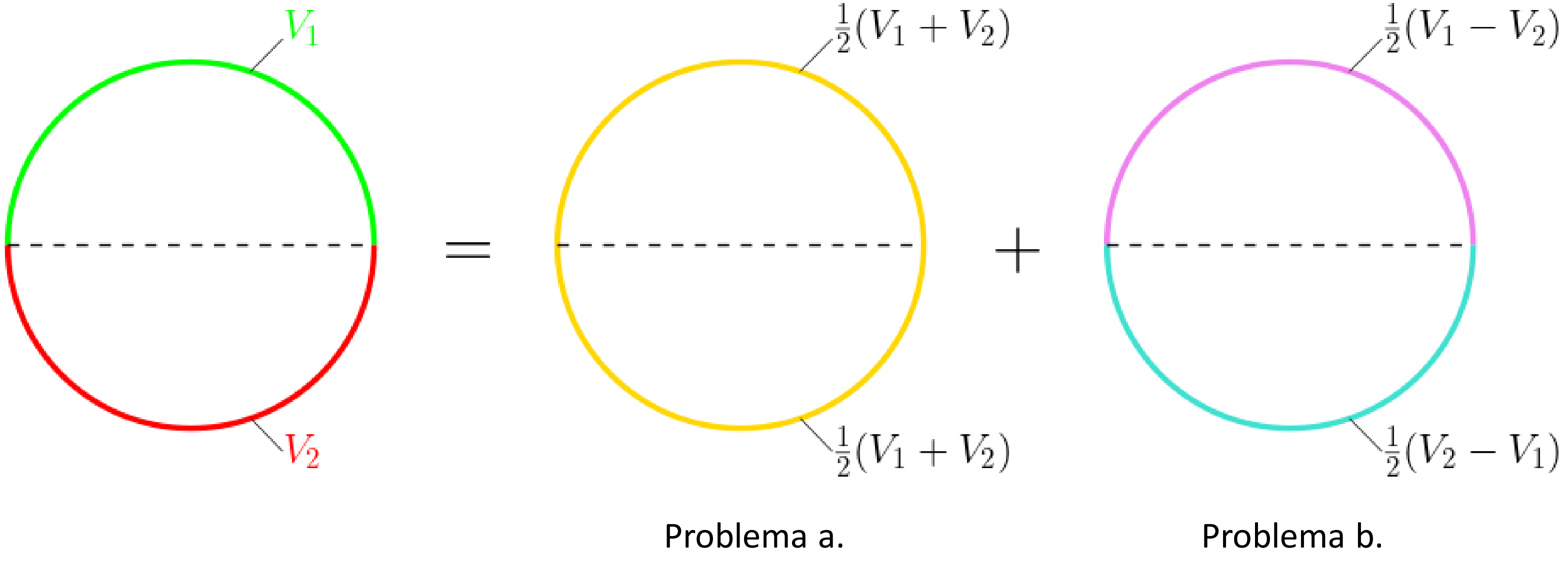
- Las condiciones de contorno definen dos problemas **independientes** entre sí *afuera* y *adentro* de la esfera
- Superposición.

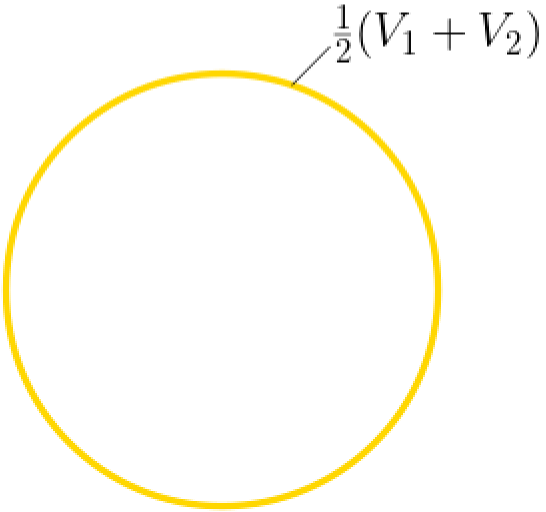


9. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2. Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.

Estrategia:

- Las condiciones de contorno definen dos problemas **independientes** entre sí *afuera* y *adentro* de la esfera
- Superposición.
- Para cada problema escribo la solución de Laplace en esféricas.
- Además uso la simetría en φ.
- Planteo las condiciones de contorno adecuadas.



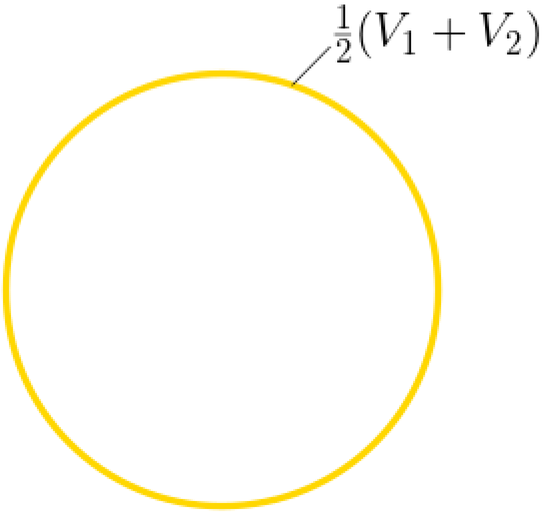


Problema a.

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_l \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & adentro \\ \sum_l \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & afuera \end{cases}$$

Condiciones de contorno

- $|\phi| < \infty \quad$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \to 0 \quad$ si $r \longrightarrow \infty$
- $\phi(a^-) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$
- $\phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$

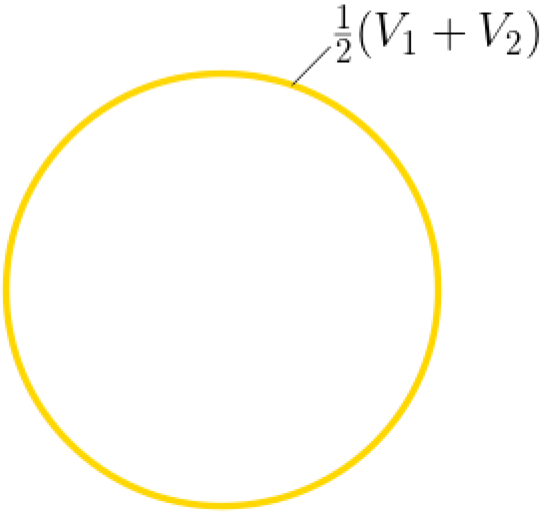


Problema a.

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_l \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & adentro \\ \sum_l \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right) P_l(cos\theta) & afuera \end{cases}$$

Condiciones de contorno

- $|\phi| < \infty \quad$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \to 0 \quad$ si $r \longrightarrow \infty$
- $\phi(a^-) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$
- $\phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$



Problema a.

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

Y queremos imponer la condición de borde

$$\phi(a) = \sum_l A_l \frac{1}{a} P_l(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

Y queremos imponer la condición de borde

$$\phi(a) = \sum_l A_l \frac{1}{a} P_l(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$$A_0 \frac{1}{a} P_0(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

El lado derecho es cte, entonces sólo puede haber contribución de $l = 0$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

Y queremos imponer la condición de borde

$$\phi(a) = \sum_l A_l \frac{1}{a} P_l(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$$A_0 \frac{1}{a} P_0(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$$A_0 \frac{1}{a} = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$P_0(x) = 1$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

Y queremos imponer la condición de borde

$$\phi(a) = \sum_l A_l \frac{1}{a} P_l(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$$A_0 \frac{1}{a} P_0(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$$A_0 \frac{1}{a} = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$$A_0 = \frac{a}{2}(V_1 + V_2)$$

Y el resto $A_{l\neq 0} = 0$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

Y queremos imponer la condición de borde

$$\phi(a) = \sum_l A_l \frac{1}{a} P_l(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$$A_0 \frac{1}{a} P_0(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$$A_0 \frac{1}{a} = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$$A_0 = \frac{a}{2}(V_1 + V_2)$$

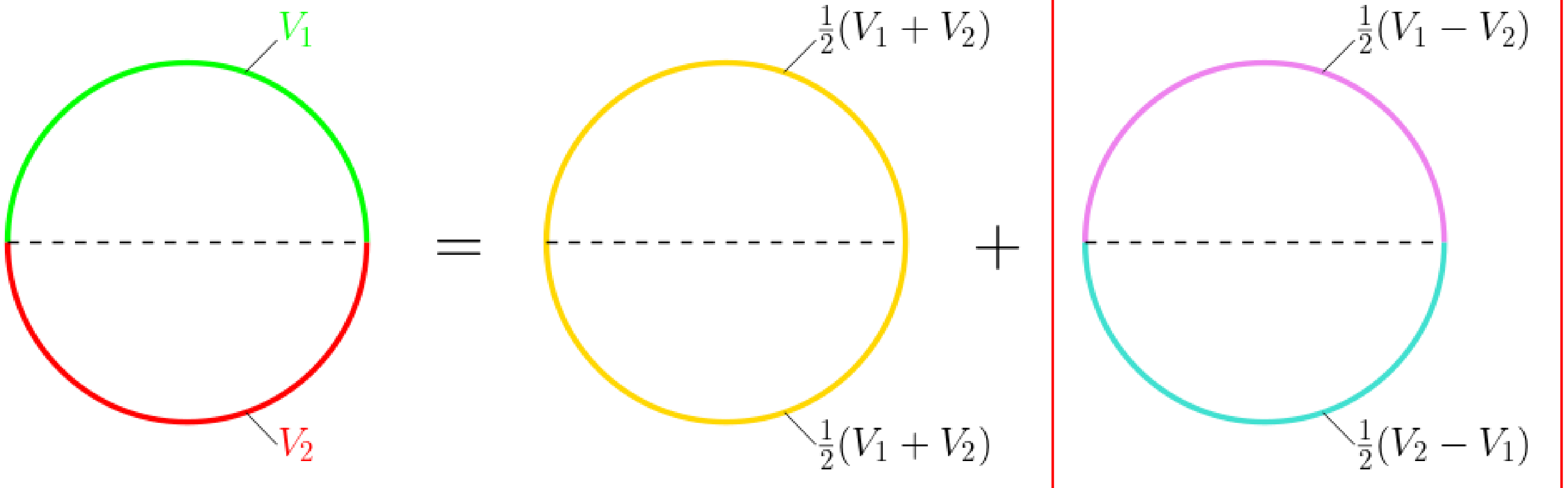
$$\boxed{\phi(r,\theta,\varphi) = 1/2 \frac{a(V_1 + V_2)}{r_>}}$$

9. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2. Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.

Estrategia:

- Las condiciones de contorno definen dos problemas **independientes** entre sí *afuera* y *adentro* de la esfera
- Superposición.
- Para cada problema escribo la solución de Laplace en esféricas.
- Además uso la simetría en φ.
- Planteo las condiciones de contorno adecuadas.

Ahora hay que resolver este (el difícil!)

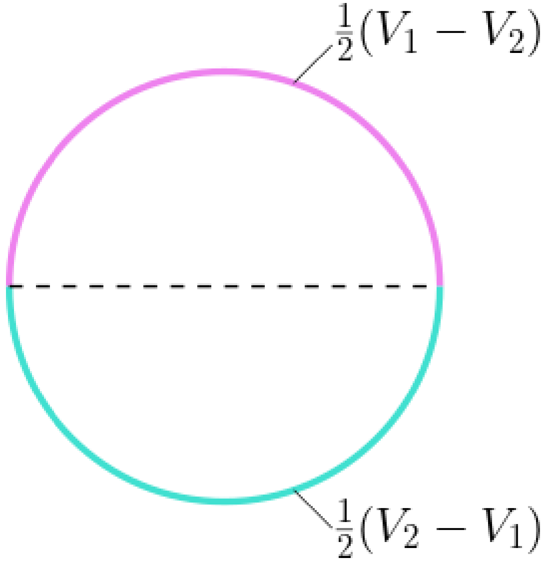


Problema a.

Problema b.

Condiciones de contorno

- $|\phi| < \infty$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \to 0$ si $r \longrightarrow \infty$
- $\phi(a^-) =$?
- $\phi(a^+) =$?

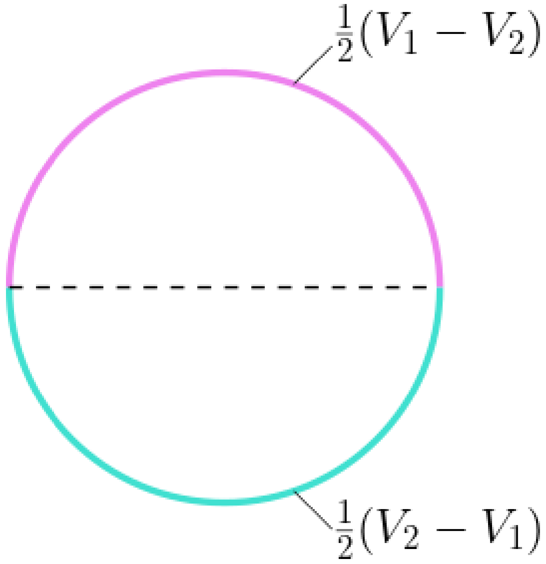


Problema b.

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Condiciones de contorno

- $|\phi| < \infty \quad$ si $r \longrightarrow 0$
- $|\phi| \rightarrow 0 \quad$ si $r \longrightarrow \infty$
- $\phi(a^-) = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)\,[\Theta(\cos\theta) - \Theta(-\cos\theta)]$
- $\phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)\,[\Theta(\cos\theta) - \Theta(-\cos\theta)]$



Problema b.

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)\,[\Theta(\cos\theta) - \Theta(-\cos\theta)]$$

Y queremos imponer la condición de borde

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)\,[\Theta(\cos\theta) - \Theta(-\cos\theta)]$$

Y queremos imponer la condición de borde

$$\phi(r=a) = \sum_l A_l \frac{1}{a} P_l(x) = \frac{1}{2}\Big(V_1 - V_2\Big)\Big[\Theta(x) - \Theta(-x)\Big]$$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)\,[\Theta(\cos\theta) - \Theta(-\cos\theta)]$$

Y queremos imponer la condición de borde

$$\phi(r=a) = \sum_l A_l \frac{1}{a} P_l(x) = \frac{1}{2}\Big(V_1 - V_2\Big)\Big[\Theta(x) - \Theta(-x)\Big]$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) A_l \frac{1}{a} P_l(x) = \frac{1}{2}\Big(V_1 - V_2\Big)\int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)\Big[\Theta(x) - \Theta(-x)\Big]$$

Va a haber que arremangarse para esta integral

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)\,[\Theta(\cos\theta) - \Theta(-\cos\theta)]$$

Y queremos imponer la condición de borde

$$\phi(r=a) = \sum_l A_l \frac{1}{a} P_l(x) = \frac{1}{2}\left(V_1 - V_2\right)\left[\Theta(x) - \Theta(-x)\right]$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) A_l \frac{1}{a} P_l(x) = \frac{1}{2}\left(V_1 - V_2\right) \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)\left[\Theta(x) - \Theta(-x)\right]$$

Uso ortogonalidad

$$\sum_l \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}\frac{A_l}{a} = \frac{1}{2}\left(V_1 - V_2\right)\left[\int_0^1 dx\ P_{l'}(x) - \int_{-1}^{0} dx\ P_{l'}(x)\right]$$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)\left[\Theta(\cos\theta) - \Theta(-\cos\theta)\right]$$

Y queremos imponer la condición de borde

$$\phi(r=a) = \sum_l A_l \frac{1}{a} P_l(x) = \frac{1}{2}\Big(V_1 - V_2\Big)\Big[\Theta(x) - \Theta(-x)\Big]$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x) A_l \frac{1}{a} P_l(x) = \frac{1}{2}\Big(V_1 - V_2\Big)\int_{-1}^{1} dx\ P_{l'}(x)\Big[\Theta(x) - \Theta(-x)\Big]$$

$$\sum_l \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}\frac{A_l}{a} = \frac{1}{2}\Big(V_1 - V_2\Big)\left[\int_0^1 dx\ P_{l'}(x) - \int_{-1}^{0} dx\ P_{l'}(x)\right]$$

$$\frac{2}{2l'+1}\frac{A_l'}{a} = \frac{1}{2}\Big(V_1 - V_2\Big)\left[\int_0^1 dx\ P_{l'}(x) \mp \int_0^1 dx\ P_{l'}(x)\right]$$

Uso la paridad de los P_l (cambio de var. $x \to -x$ y $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$)

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_l A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

Habíamos llegado a esta expresión

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)\,[\Theta(\cos\theta) - \Theta(-\cos\theta)]$$

Y queremos imponer la condición de borde

$$\phi(r=a) = \sum_l A_l \frac{1}{a} P_l(x) = \frac{1}{2}\Big(V_1 - V_2\Big)\Big[\Theta(x) - \Theta(-x)\Big]$$

$$\sum_l \int_{-1}^{1} dx\; P_{l'}(x) A_l \frac{1}{a} P_l(x) = \frac{1}{2}\Big(V_1 - V_2\Big) \int_{-1}^{1} dx\; P_{l'}(x)\Big[\Theta(x) - \Theta(-x)\Big]$$

$$\sum_l \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}\frac{A_l}{a} = \frac{1}{2}\Big(V_1 - V_2\Big)\Big[\int_0^1 dx\; P_{l'}(x) - \int_{-1}^{0} dx\; P_{l'}(x)\Big]$$

$$\frac{2}{2l'+1}\frac{A_l'}{a} = \frac{1}{2}\Big(V_1 - V_2\Big)\Big[\int_0^1 dx\; P_{l'}(x) \mp \int_0^1 dx\; P_{l'}(x)\Big]$$

$$\begin{cases} \frac{2}{2l+1}\frac{A_l}{a} = \Big(V_1 - V_2\Big)\underline{\int_0^1 dx\; P_{l'}(x)} & \text{si } l' \text{ es impar} \\ A_l = 0 & \text{si } l' \text{ es par} \end{cases}$$

Ya tenemos la mitad de los A_l, ahora falta esta integral

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\frac{d}{dx}\left(P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)\right)}$$

Relación de
recurrencia útil

$$\int_0^1 dx\, P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\frac{d}{dx}\big(P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)\big)}$$

Relación de recurrencia útil

$$\int_0^1 dx\, P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$\int_0^1 dx\, P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\big(-P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)\big) \longleftarrow \quad P_l(1) = 1$$

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\frac{d}{dx}\big(P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)\big)}$$

Relación de recurrencia útil

$$\int_0^1 dx\, P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$\int_0^1 dx\, P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\big(-P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)\big) \longleftarrow \quad P_l(1) = 1$$

$$\int_0^1 dx\, P_l(x) = (-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{(l-2)!!}{(l+1)!!} \longleftarrow \quad P_l(0) = (-1)^{l/2}\frac{(l-1)!!}{(l)!!}$$

Si l es par

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\frac{d}{dx}\big(P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)\big)}$$

Relación de
recurrencia útil

$$\int_0^1 dx\, P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$\int_0^1 dx\, P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\big(-P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)\big) \longleftarrow \quad P_l(1) = 1$$

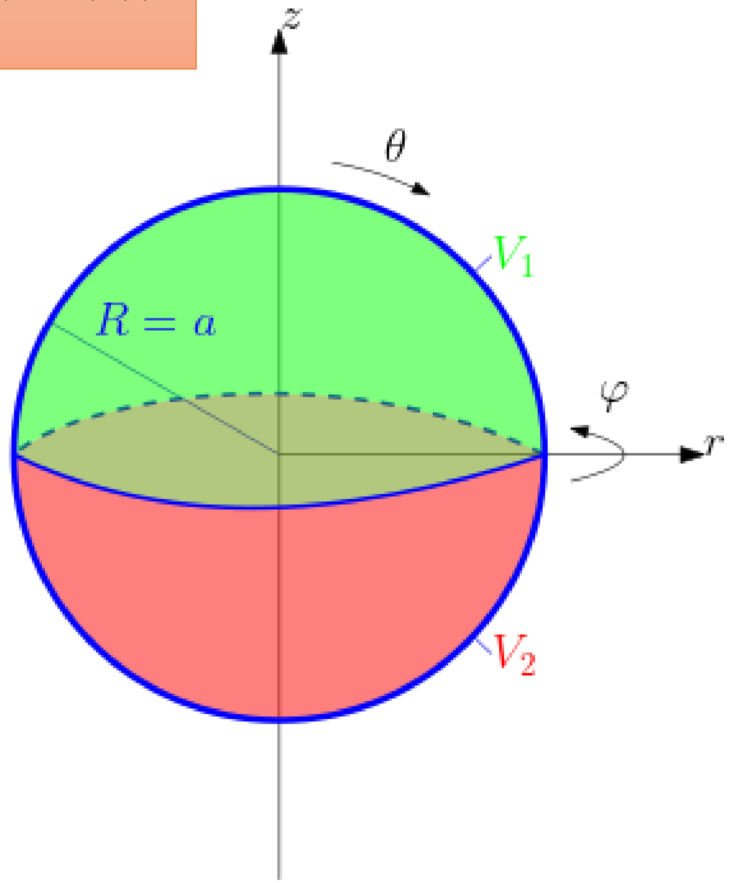
$$\int_0^1 dx\, P_l(x) = (-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{(l-2)!!}{(l+1)!!} \longleftarrow \quad P_l(0) = (-1)^{l/2}\frac{(l-1)!!}{(l)!!}$$

Si l es par

$$\begin{cases} A_l^{(b)} = 0 & si\ l\ par \\ A_l^{(b)} = \dfrac{a(2l+1)}{2}(V_1 - V_2)(-1)^{\frac{l-1}{2}}\dfrac{(l-2)!!}{(l+1)!!} & si\ l\ impar \end{cases}$$

9. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2. Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{(V_1+V_2)}{2}\frac{a}{r_>} + \frac{(V_1-V_2)}{2}\sum_{l\ impar}(-1)^{\frac{l-1}{2}}(2l+1)\frac{(l-2)!!}{(l+1)!!}\frac{a\,r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos(\theta))$$



Clase práctica del 16/09 - Esféricas

- Repaso muy rápido de Laplace y separación de variables en esféricas
- Problemita simple y canónico

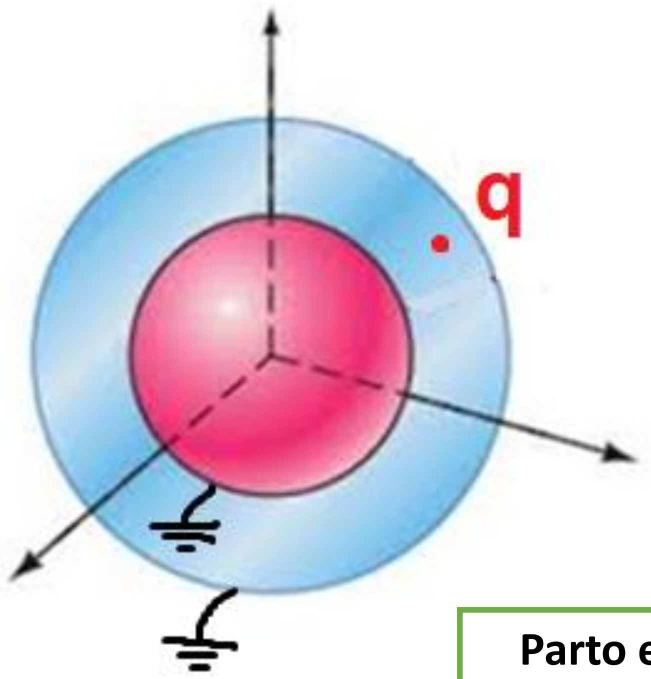
- Problema: G.2 – Ej.9

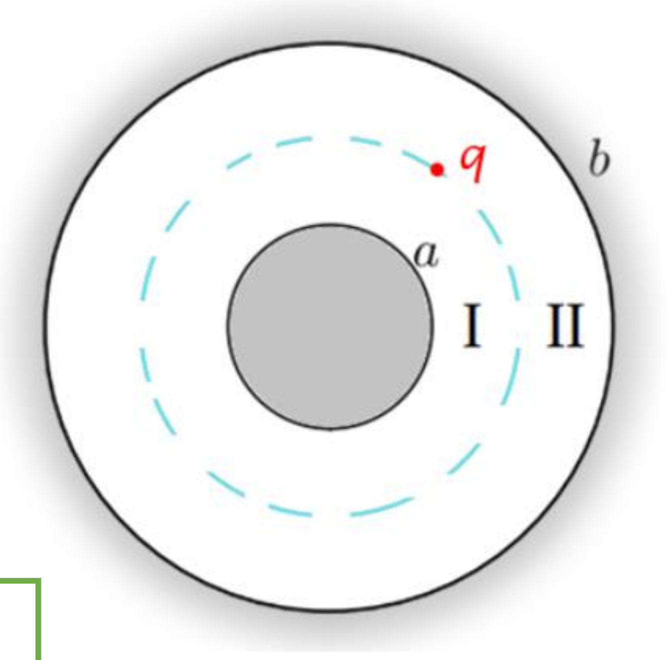
- **Problema: G.2 – Ej.11**

Problema 11 de la guía

11. (a) Encontrar el potencial de una carga puntual q entre dos cáscaras esféricas conductoras, concéntricas y conectadas a tierra, de radios a y b respectivamente.

Carga frente a dos esferas conductoras



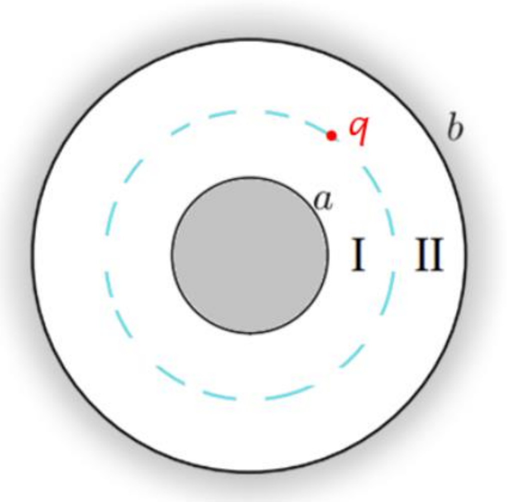


Parto el dominio en 2 regiones, cortando en $r = r'$. Allí luego voy a imponer condiciones de continuidad o de salto

$$\phi(r,\varphi,\theta) = \sum_{lm}\left(A_{lm}r^{l} + B_{lm}r^{-(l+1)}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

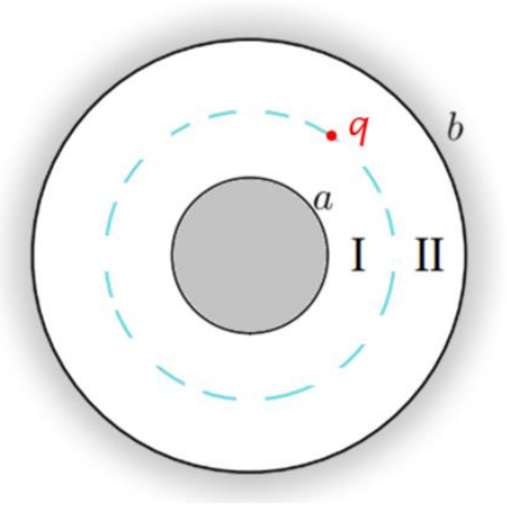
Solución de Laplace en esféricas

Hay una solución de esta forma para cada región I, II



$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_{lm} \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ a < r < r' \\ \sum_{lm} \left(C_{lm} r^l + \frac{D_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ r' < r < b \end{cases}$$

Escribo explícitamente para cada región



$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_{lm} \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ a < r < r' \\ \sum_{lm} \left(C_{lm} r^l + \frac{D_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ r' < r < b \end{cases}$$

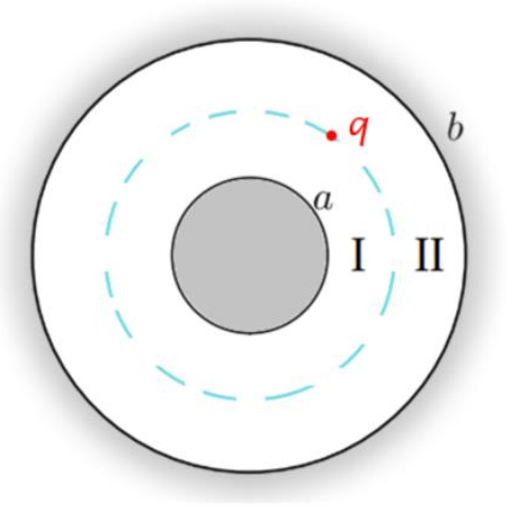
Escribo explícitamente para cada región

$a < r < r'$ →

El potencial se anula en $r = a$ por las condiciones de cont.

$\mathrm{r}' < r < b$ →

El potencial se anula en $r = b$ por las condiciones de cont.



$$\phi(r,\theta,\varphi)=\begin{cases}\sum_{lm}\left(A_{lm}r^l+\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ a<r<r' \\ \sum_{lm}\left(C_{lm}r^l+\frac{D_{lm}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ r'<r<b\end{cases}$$

Escribo explícitamente para cada región

$a<r<r'$ →

$$\sum_{lm}\left(A_{lm}a^l+\frac{B_{lm}}{a^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi)=0$$

$$A_{lm}a^l+\frac{B_{lm}}{a^{l+1}}=0$$

$$B_{lm}=-A_{lm}a^{2l+1}$$

$$\phi=\sum_{lm}A_{lm}\left(r^l-\frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

El potencial se anula en $r=a$ por las condiciones de cont.

$r'<r<b$ →

$$\sum_{lm}\left(C_{lm}b^l+\frac{D_{lm}}{b^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi)=0$$

$$C_{lm}b^l+\frac{D_{ml}}{b^{l+1}}=0$$

$$D_{lm}=-C_{lm}b^{2l+1}$$

$$\phi=\sum_{lm}C_{lm}\left(r^l-\frac{b^{2l+1}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

El potencial se anula en $r=b$ por las condiciones de cont.

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_{lm} A_{lm}\left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ a < r < r' \\ \sum_{lm} C_{lm}\left(r^l - \frac{b^{2l+1}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ r' < r < b \end{cases}$$

$\phi = 0 \quad$ si $r \longrightarrow a$

$\phi = 0 \quad$ si $r \longrightarrow b$

$\phi(r'^{-}) = \phi(r'^{+})$

$\frac{\partial\phi}{\partial r}(r'^{-}) - \frac{\partial\phi}{\partial r}(r'^{+}) = 4\pi\sigma$

Notación

$r_< = \min\{r', r\}$

$r_> = \max\{r', r\}$

$r'^{\pm} = \lim_{r \longrightarrow r'^{\pm}} r$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \sum_{lm} A_{lm}\left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ a < r < r' \\ \sum_{lm} C_{lm}\left(r^l - \frac{b^{2l+1}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) & si\ r' < r < b \end{cases}$$

- ✓✓ $\phi = 0$ si $r \longrightarrow a$
- ✓✓ $\phi = 0$ si $r \longrightarrow b$
- ✓✓ $\phi(r'^-) = \phi(r'^+)$
- ✗ $\frac{\partial \phi}{\partial r}(r'^-) - \frac{\partial \phi}{\partial r}(r'^+) = 4\pi\sigma$

Ya cumplimos las primeras tres condiciones, falta la última

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{lm} \tilde{A}_{lm}\left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Reescribir de esta forma asegura la continuidad en r'

A partir de la última condición podremos despejar los coeficientes $\tilde{A}_{lm}$

Notación

$$r_< = \min\{r', r\}$$
$$r_> = \max\{r', r\}$$
$$r'^{\pm} = \lim_{r \longrightarrow r'^{\pm}} r$$

Cómo escribimos la densidad de carga?

Cómo escribimos la densidad de carga?

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{{r'}^2 \sin\theta'}\, \delta(\theta - \theta')\, \delta(\varphi - \varphi') \longrightarrow$$

$$Q = {r'}^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{q}{{r'}^2 \sin\theta'}\, \delta(\theta - \theta')\, \delta(\varphi - \varphi')$$

$$Q = q$$

Cómo escribimos la densidad de carga?

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{r'^2 \sin\theta'}\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\varphi-\varphi') \longrightarrow$$

$$Q = r'^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{q}{r'^2 \sin\theta'}\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')$$

$$Q = q$$

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{r'^2 \sin\theta'}\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\varphi-\varphi') \Longrightarrow \sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{r'^2}\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')$$

If the delta function has as argument a function $f(x)$ of the independent variable x, it can be transformed according to the rule,

$$(5)\quad \delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{\left|\frac{df}{dx}(x_i)\right|}\,\delta(x-x_i),$$

$$\Phi(\bar{r}) = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi)\, A_{lm} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right)\left(r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right)$$

$\cdot$ Región I ; $r < r'$

$$\Phi(r) = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi)\, A_{lm} \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right)\left(r'^l - \frac{b^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}(r) = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi)\, A_{lm} \left(l r^{l-1} + (l+1)\frac{a^{2l+1}}{r^{l+2}} \right)\left(r'^l - \frac{b^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right)$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=r'^-} = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi)\, A_{lm} \left(l r'^{l-1} + (l+1)\frac{a^{2l+1}}{r'^{l+2}} \right)\left(r'^l - \frac{b^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right)$$

Región II, $r' < r$

$$\Phi(r) = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi)\, A_{lm} \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right)\left(r^l - \frac{b^{2l+1}}{r^{l+1}} \right)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}(r) = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi)\, A_{lm} \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right)\left(l r^{l-1} + (l+1)\frac{b^{2l+1}}{r^{l+2}} \right)$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=r'^+} = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi)\, A_{lm} \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right)\left(l r'^{l-1} + (l+1)\frac{b^{2l+1}}{r'^{l+2}} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial r}(r^-) - \frac{\partial\Phi}{\partial r}(r^+) = 4\pi\sigma} = \ldots$$

$$4\pi\sigma = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) A_{lm} \left[\left(l r'^{l-1} + (l+1)\frac{a^{2l+1}}{r'^{l+2}} \right)\left(r'^l - \frac{b^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) - \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right)\left(l r'^{l-1} + (l+1)\frac{b^{2l+1}}{r'^{l+2}} \right) \right]$$

$$4\pi\sigma = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) A_{lm} \left[\cancel{l r'^{2l-1}} - \frac{l b^{2l+1}}{r'^2} + \frac{(l+1)a^{2l+1}}{r'^2} - \cancel{\frac{(l+1)(ab)^{2l+1}}{r'^{2l+3}}} - \cancel{l r'^{2l-1}} - \frac{(l+1)b^{2l+1}}{r'^2} + \frac{l a^{2l+1}}{r'^2} + \cancel{\frac{(l+1)(ab)^{2l+1}}{r'^{2l+3}}} \right]$$

$$4\pi\sigma = \sum_{lm} Y_{lm} A_{lm} \left[\frac{(2l+1)a^{2l+1}}{r'^2} - \frac{(2l+1)b^{2l+1}}{r'^2} \right] = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) A_{lm} (2l+1)\frac{b^{2l+1}}{r'^2}\left[\left(a/b\right)^{2l+1} - 1 \right]$$

$$\boxed{\sigma = \frac{q}{r'^2}\delta(\cos\theta - \cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')}$$

★ $$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, Y^*_{l'm'}(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{l'l}\delta_{m'm} \qquad (3.55)$$

$$4\pi\sigma = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) A_{lm} (2l+1) \frac{b^{2l+1}}{r'^2}\left[\left(a/b\right)^{2l+1} - 1\right]$$

$$\frac{4\pi q}{\cancel{r'^2}} \delta(\cos\theta - \cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi') = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) A_{lm} (2l+1) \frac{b^{2l+1}}{\cancel{r'^2}}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1} - 1\right]$$

$$4\pi q\, \delta(\cos\theta - \cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')\, Y^*_{\tilde{l}\tilde{m}}(\theta,\varphi) = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) Y^*_{\tilde{l}\tilde{m}}(\theta,\varphi) A_{lm} (2l+1) b^{2l+1}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1} - 1\right]$$

$$\int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi\; 4\pi q\, \delta(\cos\theta - \cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')\, Y^*_{\tilde{l}\tilde{m}}(\theta,\varphi) = \sum_{lm} \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi\; Y_{lm}(\theta,\varphi) Y^*_{\tilde{l}\tilde{m}}(\theta,\varphi)}_{★\ \delta_{l\tilde{l}}\,\delta_{m\tilde{m}}} A_{lm} (2l+1) b^{2l+1}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1} - 1\right]$$

$$4\pi q\, Y^*_{\tilde{l}\tilde{m}}(\theta',\varphi') = \sum_{lm} \delta_{l\tilde{l}}\,\delta_{m\tilde{m}}\, A_{lm} (2l+1) b^{2l+1}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1} - 1\right]$$

$$4\pi q\, Y^*_{\tilde{l}\tilde{m}}(\theta',\varphi') = A_{\tilde{l}\tilde{m}} (2\tilde{l}+1) b^{2\tilde{l}+1}\left[\left(a/b\right)^{2\tilde{l}+1} - 1\right]$$

$$\boxed{A_{lm} = \frac{4\pi q}{2l+1}\, \frac{-b^{-(2l+1)}}{1-\left(a/b\right)^{2l+1}}\, Y^*_{lm}(\theta',\varphi')}$$

Reemplazando los A_{lm}

$$\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l,m} \frac{q}{1-(a/b)^{2l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Problema 11 de la guía

11. (a) Encontrar el potencial de una carga puntual q entre dos cáscaras esféricas conductoras, concéntricas y conectadas a tierra, de radios a y b respectivamente.

    (b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.

    (c) Observar qué sucede cuando se hace tender el radio de la esfera exterior a infinito ¿Cuánto valen las cargas totales inducidas en ese caso?

    (d) Resolver el problema en el caso en que los potenciales de las esferas se elevan a V_1 y V_2. (Ver último problema de la guía 1).

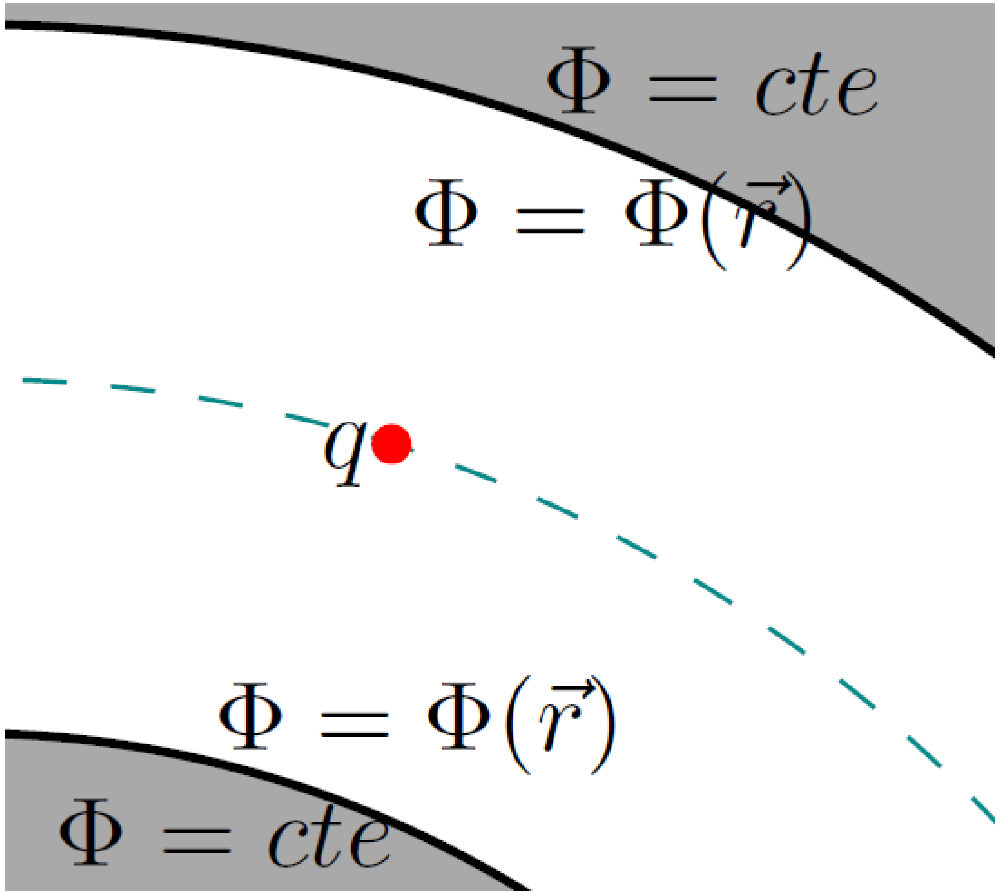
    (e) Resolver el problema en el caso en que las esferas están aisladas y tienen una carga total Q_1 y Q_2. (Ver último problema de la guía 1).

$$\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l,m} \frac{q}{1-(a/b)^{2l+1}} \frac{4\pi}{2l+1}\left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\boxed{4\pi\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^-) - \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^+)}$$

$$\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l,m} \frac{q}{1-(a/b)^{2l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\boxed{4\pi\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^-) - \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^+)}$$

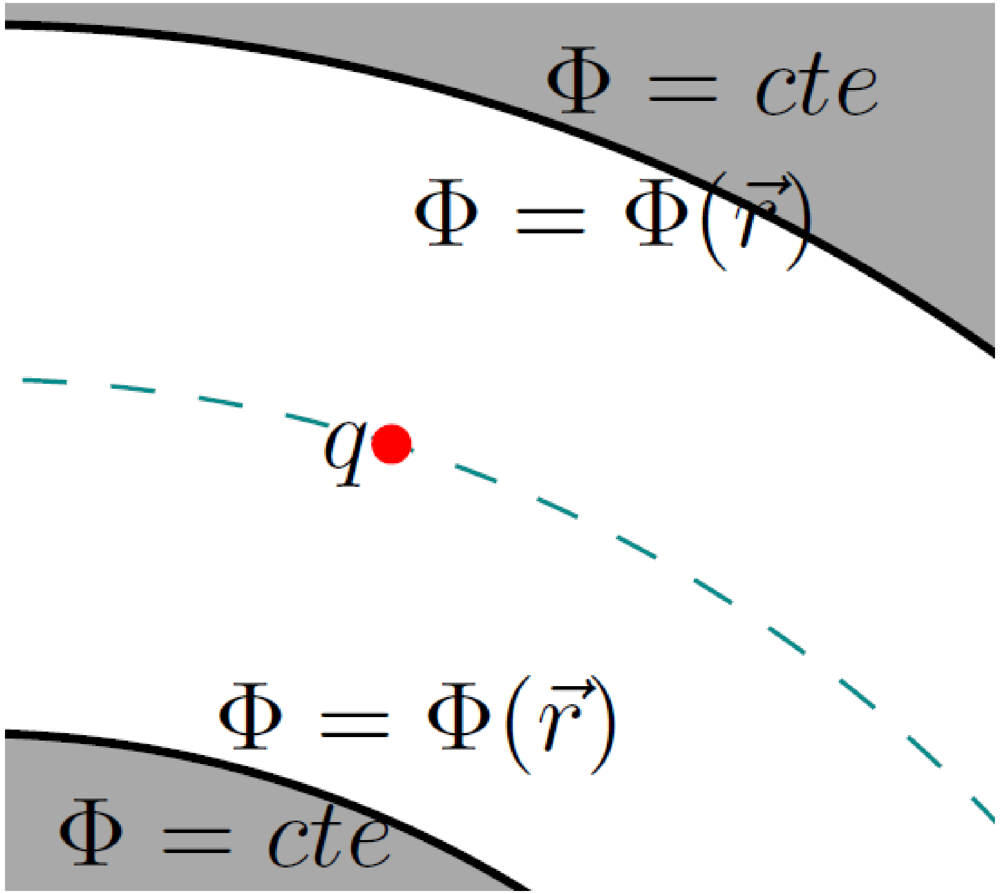


$$\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l,m} \frac{q}{1-(a/b)^{2l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\boxed{4\pi\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^-) - \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^+)}$$

$r = a$

$$4\pi\sigma_a = \cancel{\frac{\partial\phi}{\partial r}}(r^-) - \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^+)$$

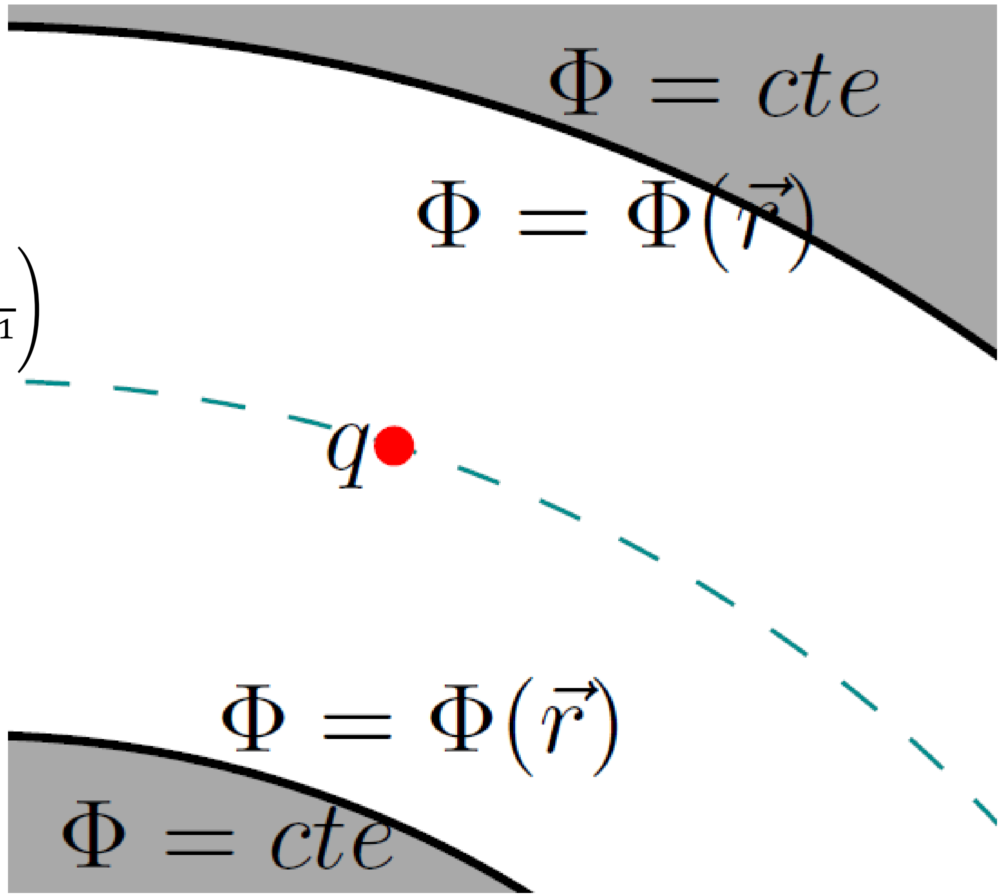


$$\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l,m} \frac{q}{1-(a/b)^{2l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\boxed{4\pi\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^-) - \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^+)}$$

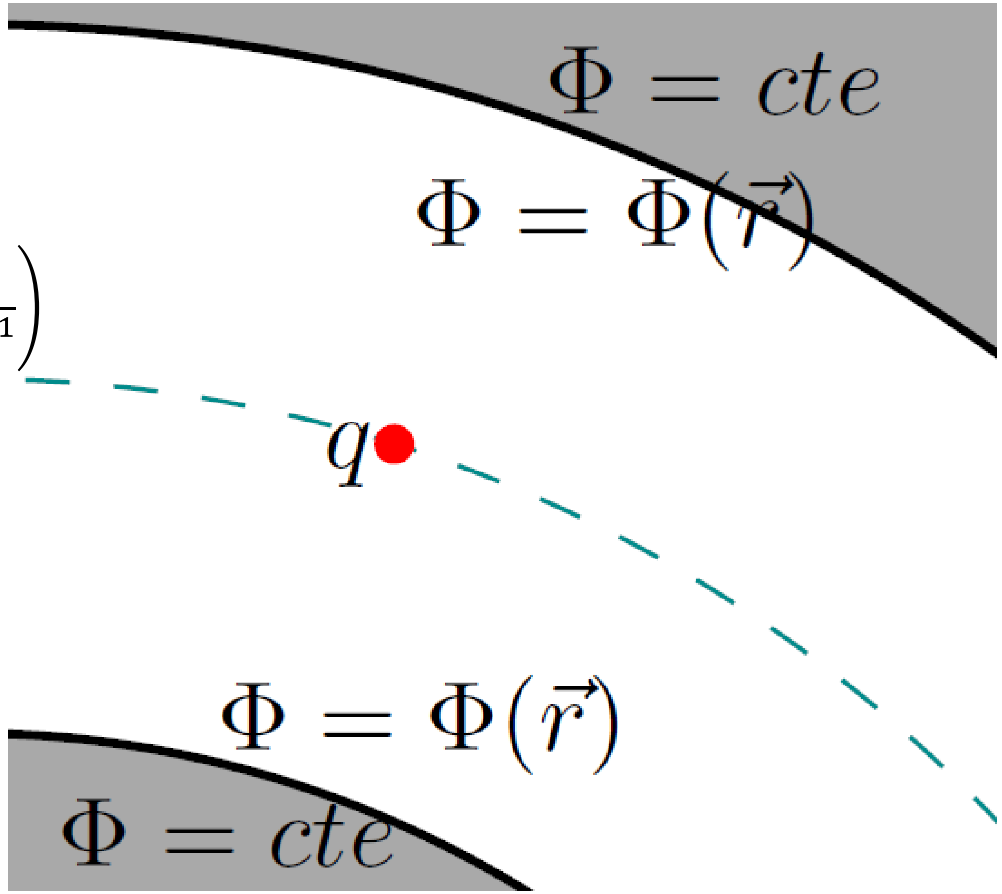
$r = a$

$$\sigma_a = -q \sum_{l,m} \frac{a^{l-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi) Y_{lm}^*(\theta',\varphi') \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$$



$$\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l,m} \frac{q}{1-(a/b)^{2l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\boxed{4\pi\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^-) - \frac{\partial\phi}{\partial r}(r^+)}$$



$r = a$ $$\sigma_a = -q \sum_{l,m} \frac{a^{l-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi) Y_{lm}^*(\theta',\varphi') \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$$

$r = b$ $$\sigma_b = -q \sum_{l,m} \frac{\frac{1}{b^{l+2}}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi) Y_{lm}^*(\theta',\varphi') \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right)$$

Carga total

$$Q_a = -q \int_{r=a} dS \sum_{l,m} \frac{a^{l-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi) Y_{lm}^{*}(\theta',\varphi') \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^{l}}{b^{2l+1}} \right)$$

La carga total es la integral de la densidad sobre la superficie del conductor

Carga total

$$Q_a = -q\int_{r=a} dS \sum_{l,m} \frac{a^{l-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\left(\frac{1}{r'^{l+1}}-\frac{r'^{l}}{b^{2l+1}}\right)$$

$$Q_a = -q\int_{r=a} dS \frac{a^{-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)} Y_{00}(\theta,\varphi)Y_{00}^*(\theta',\varphi')\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{b}\right)$$

Sólo contribuye la componenete 00

Puedo pensar que está el Y_{00}^* multiplicando (que es una constante). Entonces todos los $l, m \neq 0{,}0$ se anulan por ortogonalidad

Carga total

$$Q_a = -q\int_{r=a} dS \sum_{l,m} \frac{a^{l-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^{l}}{b^{2l+1}}\right)$$

$$Q_a = -q\int_{r=a} dS \frac{a^{-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)} Y_{00}(\theta,\varphi)Y_{00}^*(\theta',\varphi')\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}\right)$$

$$Q_a = -\frac{q}{4\pi}\int_{r=a} dS \frac{a^{-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}\right) \longleftarrow \quad Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

Carga total

$$Q_a = -q\int_{r=a} dS \sum_{l,m} \frac{a^{l-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y_{lm}^{*}(\theta',\varphi')\left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^{l}}{b^{2l+1}}\right)$$

$$Q_a = -q\int_{r=a} dS \frac{a^{-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)} Y_{00}(\theta,\varphi)Y_{00}^{*}(\theta',\varphi')\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}\right)$$

$$Q_a = -\frac{q}{4\pi}\int_{r=a} dS \frac{a^{-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}\right)$$

$$Q_a = -\frac{q\ a}{1-\left(\frac{a}{b}\right)}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}\right)$$

Carga total

$$Q_a = -q\int_{r=a} dS \sum_{l,m} \frac{a^{l-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}}\right)$$

$$Q_a = -q\int_{r=a} dS \frac{a^{-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)} Y_{00}(\theta,\varphi)Y_{00}^*(\theta',\varphi')\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}\right)$$

$$Q_a = -\frac{q}{4\pi}\int_{r=a} dS \frac{a^{-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}\right)$$

$$Q_a = -\frac{q\ a}{1-\frac{a}{b}}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}\right)$$

$$Q_b = -\frac{q}{1-\frac{a}{b}}\left(1 - \frac{a}{r'}\right)$$ ← Análogamente

Carga total

$$Q_a = -q \int_{r=a} dS \sum_{l,m} \frac{a^{l-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi) Y_{lm}^*(\theta',\varphi') \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^{l}}{b^{2l+1}} \right)$$

$$Q_a = -q \int_{r=a} dS \frac{a^{-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)} Y_{00}(\theta,\varphi) Y_{00}^*(\theta',\varphi') \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b} \right)$$

$$Q_a = -\frac{q}{4\pi} \int_{r=a} dS \frac{a^{-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b} \right)$$

$$Q_a = -\frac{q\ a}{1-\frac{a}{b}} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b} \right)$$

$$Q_b = -\frac{q}{1-\frac{a}{b}} \left(1 - \frac{a}{r'} \right)$$ ← Análogamente

Checkear

$$Q_a + Q_b = -q$$ ← Sale por Gauss

$$Q_a = -q\frac{a}{r'}$$ Cuando $b \to \infty$ ← Método de imágenes

Problema 11 de la guía

11. (a) Encontrar el potencial de una carga puntual q entre dos cáscaras esféricas conductoras, concéntricas y conectadas a tierra, de radios a y b respectivamente.

    (b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.

    (c) Observar qué sucede cuando se hace tender el radio de la esfera exterior a infinito ¿Cuánto valen las cargas totales inducidas en ese caso?

    (d) Resolver el problema en el caso en que los potenciales de las esferas se elevan a V_1 y V_2. (Ver último problema de la guía 1).

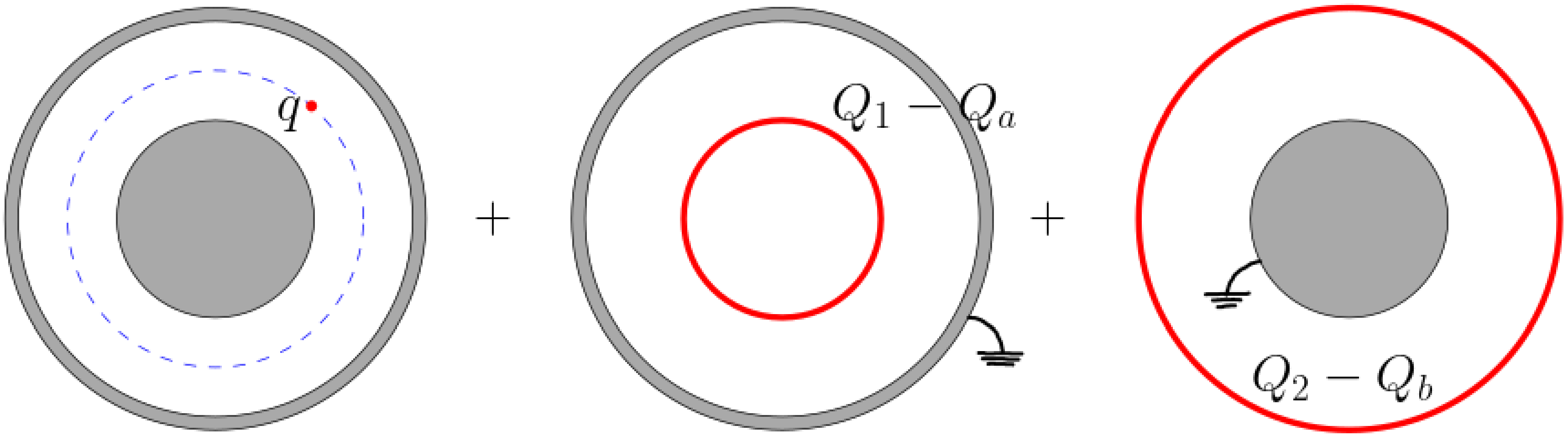
    (e) Resolver el problema en el caso en que las esferas están aisladas y tienen una carga total Q_1 y Q_2. (Ver último problema de la guía 1).

Condición de carga prefijada

- Notar la libertad de sumarle una constante al potencial

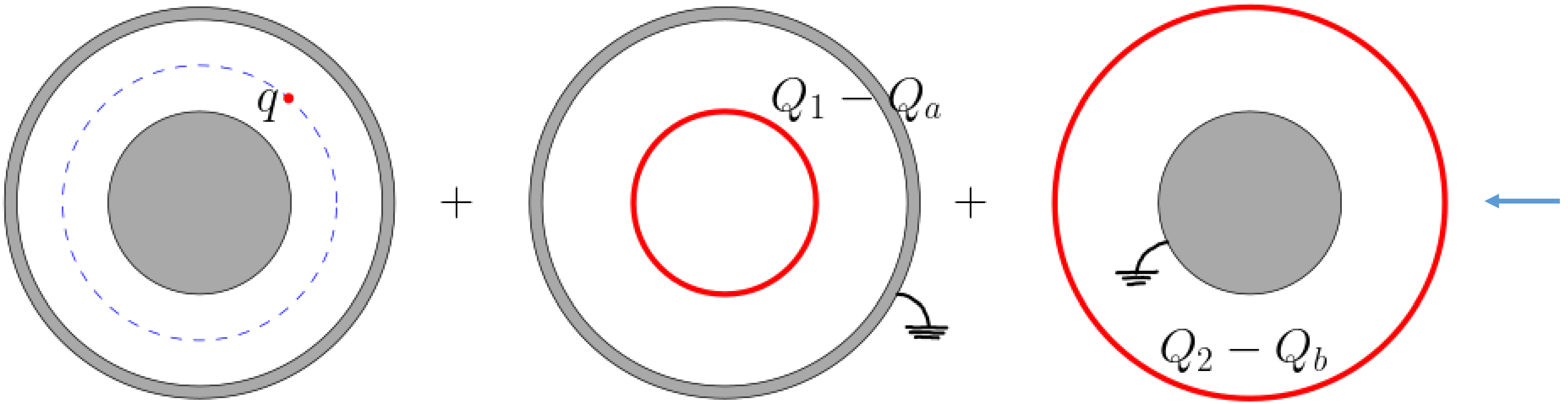
Condición de carga prefijada

- Notar la libertad de sumarle una constante al potencial
- Superposición



Condición de carga prefijada

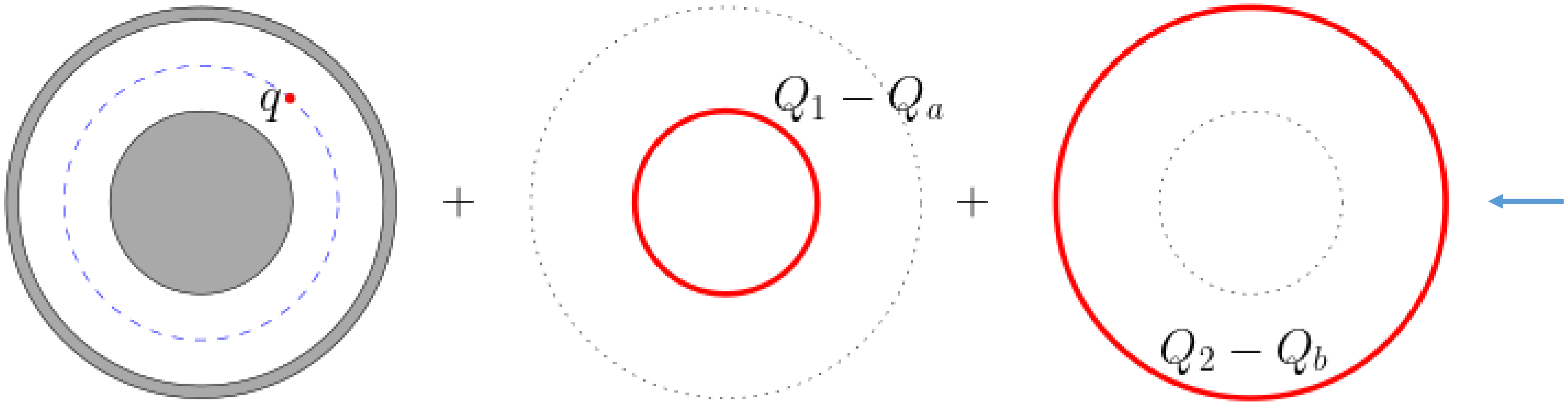
- Notar la libertad de sumarle una constante al potencial
- Superposición



Poner conductores a tierra no hace falta, y además se induce carga

Condición de carga prefijada

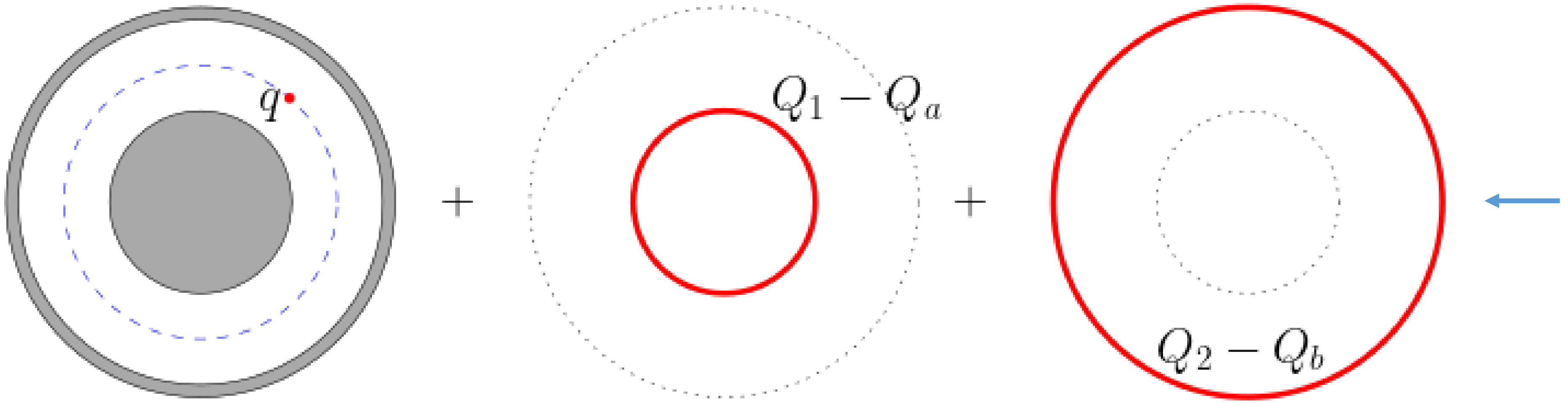
- Notar la libertad de sumarle una constante al potencial
- Superposición



De esta forma se suman las cargas que necesito, no se inducen otras y no genero campo en los conductores

Condición de carga prefijada

- Notar la libertad de sumarle una constante al potencial
- Superposición



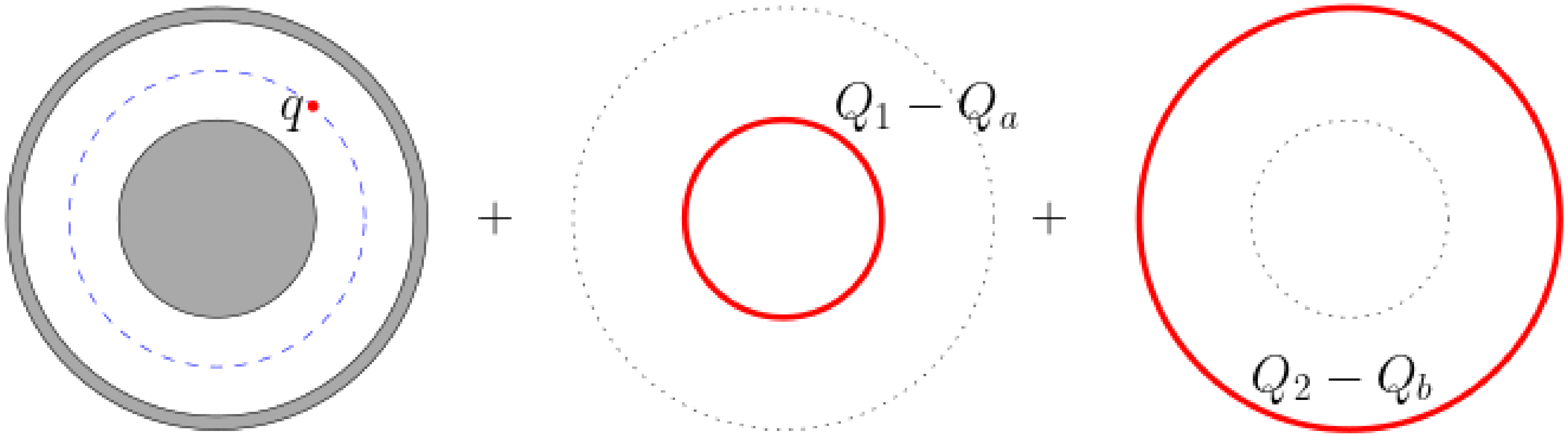
De esta forma se suman las cargas que necesito, no se inducen otras y no genero campo en los conductores

Potencial de un cascarón con carga total Q:

$$\phi = \frac{Q}{r_>}$$

Condición de carga prefijada

- Notar la libertad de sumarle una constante al potencial
- Superposición



De esta forma se suman las cargas que necesito, no se inducen otras y no genero campo en los conductores

Potencial de un cascarón con carga total Q:

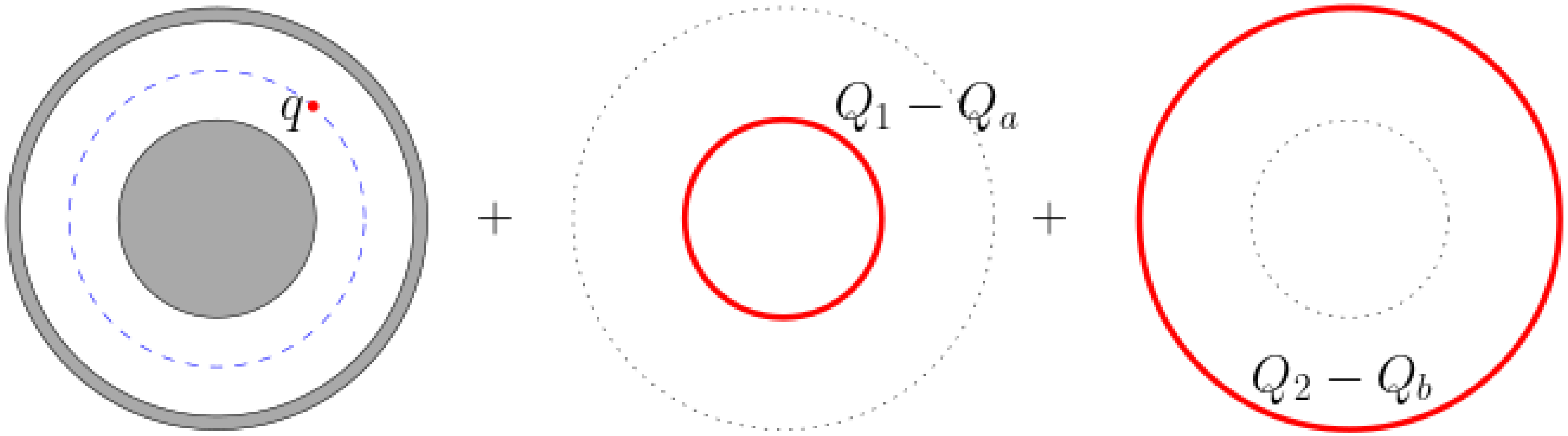
$$\phi = \frac{Q}{r_>}$$

$$\phi = \phi_0(r, \theta, \phi) + \frac{Q_1 - Q_a}{r_>^{(a)}} + \frac{Q_2 - Q_b}{r_>^{(b)}}$$

Potencial del problema a)

Condición de carga prefijada

- Notar la libertad de sumarle una constante al potencial
- Superposición



De esta forma se suman las cargas que necesito, no se inducen otras y no genero campo en los conductores

$$\phi = \phi_0(r,\theta,\phi) + \frac{Q_1 - Q_a}{r_>^{(a)}} + \frac{Q_2 - Q_b}{r_>^{(b)}}$$

Potencial del problema a)