

FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2020

APUNTES DE LA PRÁCTICA DEL 23/09:

GUÍA 2 - SEPARACIÓN DE VARIABLES EN CILÍNDRICAS - PROBLEMAS 15, 16 Y 17

Objetivos:

- Repasar la construcción de una densidad de carga correspondiente a una carga puntual en coordenadas curvilíneas (no cartesianas).
- Practicar la resolución de problemas electrostáticos en cilíndricas, de forma tal de terminar de abarcar casi todos los escenarios que nos interesan (problema 15).
- Familiarizarse con la función de Green (todavía no empezamos a usarla propiamente) y ensayar una aplicación del método de imágenes (problema 16).
- Calcular densidades y cargas inducidas en un conductor (problema 17): empezamos a ver la física del problema mas allá de todo lo que aprendimos en cuanto a transformaciones y simetrías.
- Aclarar qué significan los ejercicios e ítems con *asterisco** que aparecen en las guías de problemas (ver al final del problema 17).

Problema 15

Como ya vimos en coordenadas cartesianas, y como hicimos en el problema 14 para el interior de un cilindro finito, la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ con condiciones tipo Dirichlet corresponde a resolver el problema de una carga puntual $q = 1$ ubicada en una posición arbitraria \mathbf{r}' dentro de la región de interés, con contornos a tierra. Para eso separamos el dominio del recinto en dos partes a partir de una superficie que contenga la carga. De este modo obtenemos dos regiones donde se tiene la ecuación de Laplace para el potencial electrostático, y podemos establecer una base de soluciones para desarrollar el problema. Luego, imponemos específicamente las condiciones de contorno sobre las soluciones de cada región, y pedimos la continuidad del potencial y el salto de la derivada normal sobre la superficie que contiene la densidad de carga superficial correspondiente a la carga puntual desarrollada en la misma base que el potencial.

Veamos entonces cómo hacer esto en el caso en que la región es el interior de un cilindro infinito de radio a cuya superficie satisface condiciones de Dirichlet. Vamos a usar coordenadas cilíndricas y vamos a introducir una carga unitaria en el punto \mathbf{r}' de coordenadas (ρ', φ', z') .

Comencemos utilizando un corte en $z = z'$ (Fig. 2a). En ese caso la superficie es un plano y sobre ella la densidad de carga es

$$\sigma(\rho, \varphi) = K\delta(\rho - \rho')\delta(\varphi - \varphi'), \quad (1)$$

donde K es una función que determinamos pidiendo, en este caso, que la carga total sea unitaria:

$$\int d\rho \rho d\varphi \sigma(\rho, \varphi) = \int K\delta(\rho - \rho')\delta(\varphi - \varphi')\rho d\rho d\varphi = 1 \implies K = \frac{1}{\rho}. \quad (2)$$

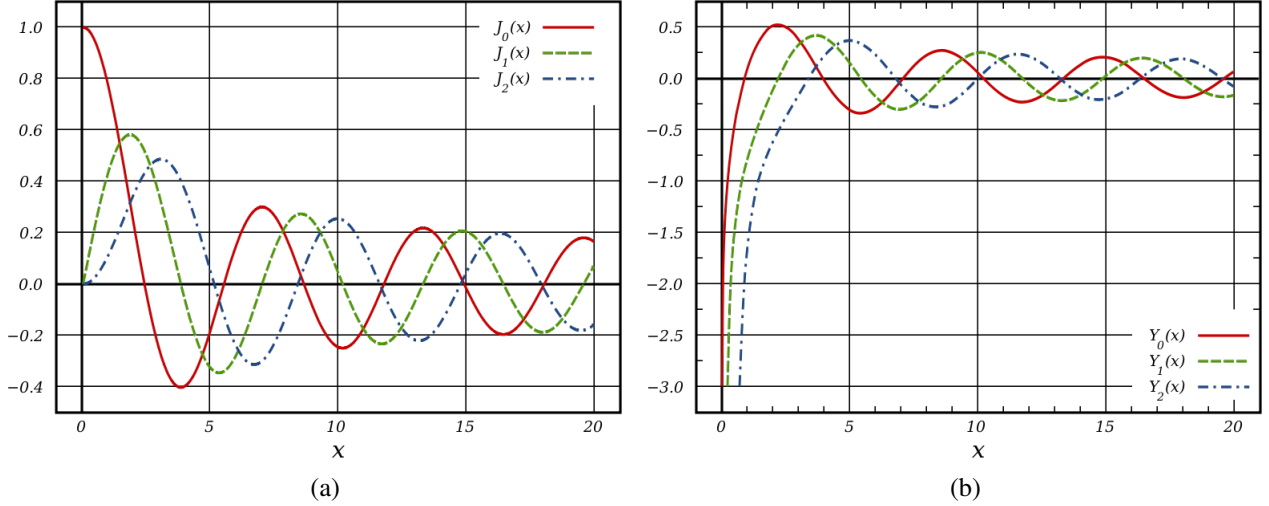


Figure 1: Funciones de Bessel ($Y_\nu = N_\nu$).

Como la superficie elegida es un plano, necesitamos una base de soluciones en φ y ρ . Esta base viene dada por funciones trigonométricas $\{e^{i\nu\varphi}\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ en φ y funciones de Bessel $\{J_\nu(k\rho), N_\nu(k\rho)\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ en ρ , mientras que en z tendremos exponenciales reales $\{e^{-kz}, e^{kz}\}$.

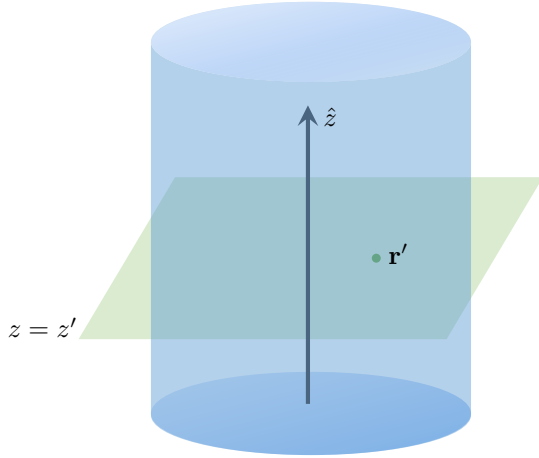
Podemos notar que el problema es simétrico ante una reflexión por el plano $\varphi = \varphi'$, dado que este plano contiene a la carga y el cilindro es simétrico por esta transformación. Luego, considerando la base alternativa $\{\cos \nu(\varphi - \varphi'), \sin \nu(\varphi - \varphi')\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ y usando que la reflexión equivale a $(\varphi - \varphi') \rightarrow -(\varphi - \varphi')$, podemos descartar los senos de esa base (por ser funciones impares) y quedarnos solo con los cosenos $\{\cos \nu(\varphi - \varphi')\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ que son pares. Vale aclarar que este es un truco muy útil que les va a servir para simplificar las cuentas y ganar tiempo pero si no se hubiesen dado cuenta y hubiesen optado por hacer combinaciones lineales de exponenciales complejas también deberían eventualmente llegar al mismo resultado (o si usan los mencionados senos y cosenos, llegarían a que los senos se van del desarrollo como vimos en la clase por zoom del 21/09, problema 14).

Respecto de las funciones de Bessel lo que deben considerar es que las mismas son suaves y tienen infinitos ceros y tienden a 0 en infinito. Además las J_ν son continuas en todo \mathbb{R} , mientras que las N_ν divergen en el origen (Fig. 1). Como nuestro problema consiste de una región que contiene al origen debemos entonces descartar las funciones N_ν . Por otro lado, así como en el caso cartesiano del interior de un cubo a potencial 0 utilizamos como base solo a los senos que se anulaban en el borde $x = a$ (esto es, los $\sin(k_n x)$ con $k_n = x_n/a$, siendo x_n los ceros de $\sin x$), de la misma forma para que el potencial se anule en $\rho = a$ nos quedaremos solo con las soluciones $J_\nu(k_{\nu n} \rho)$ con $k_{\nu n} = x_{\nu n}/a$, siendo $x_{\nu n}$ los ceros de $J_\nu(x)$.

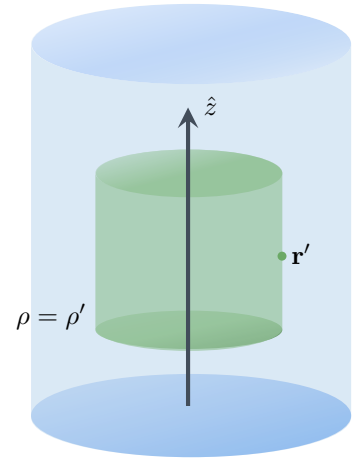
Como en este caso el problema no está acotado en z y es simétrico respecto de una reflexión en $z = z'$ utilizaremos la función $e^{-k_{\nu n}|z-z'|}$ que es continua en todos los reales, par ante la reflexión $(z-z') \rightarrow -(z-z')$ y que tiende a 0 en $\pm\infty$.

Hechas todas estas consideraciones expandimos a la función de Green del interior del cilindro no acotado como

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \nu(\varphi - \varphi') J_\nu(k_{\nu n} \rho) e^{-k_{\nu n}|z-z'|} A_{\nu n}. \quad (3)$$



(a)



(b)

Para determinar las constantes $A_{\nu n}$ utilizaremos la condición del salto de la derivada

$$\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z'^-} - \frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z'^+} = 4\pi\sigma(\varphi, \rho) \quad (4)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \nu(\varphi - \varphi') J_{\nu}(k_{\nu n} \rho) \left[k_{\nu n} e^{k_{\nu n}(z-z')} - (-k_{\nu n}) e^{-k_{\nu n}(z-z')} \right]_{z=z'} A_{\nu n} = 4\pi\sigma(\varphi, \rho) \quad (5)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \nu(\varphi - \varphi') J_{\nu}(k_{\nu n} \rho) 2k_{\nu n} A_{\nu n} = 4\pi\sigma(\varphi, \rho). \quad (6)$$

Podemos despejar las constantes usando la ortogonalidad de los cosenos

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos \nu(\varphi - \varphi') \cos \nu'(\varphi - \varphi') = \pi \delta_{\nu, \nu'} \times \begin{cases} 1, & \text{si } \nu > 0 \\ 2, & \text{si } \nu = 0 \end{cases} \quad (7)$$

y de las funciones de Bessel

$$\int_0^a d\rho \rho J_{\nu}(k_{\nu n'} \rho) J_{\nu}(k_{\nu n} \rho) = \delta_{n, n'} \frac{a^2}{2} J_{|\nu|+1}^2(x_{\nu n}) \quad (8)$$

de la siguiente manera

$$\int_0^a d\rho \rho J_{\nu'}(k_{\nu' n'} \rho) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \nu'(\varphi - \varphi') \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \nu(\varphi - \varphi') J_{\nu}(k_{\nu n} \rho) 2k_{\nu n} A_{\nu n} \quad (9)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho d\rho d\varphi \cos \nu'(\varphi - \varphi') J_{\nu'}(k_{\nu' n'} \rho) 4\pi\sigma(\varphi, \rho) \quad (10)$$

$$A_{\nu' n'} = \frac{2}{\pi a^2 J_{|\nu'|+1}^2(x_{\nu' n'}) 2k_{\nu' n'}} \left(1 - \frac{\delta_{\nu, 0}}{2}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho d\rho d\varphi \cos \nu'(\varphi - \varphi') J_{\nu'}(k_{\nu' n'} \rho) 4\pi\sigma(\varphi, \rho). \quad (11)$$

Solo nos queda resolver

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \rho d\rho d\varphi \cos \nu'(\varphi - \varphi') J_{\nu'}(k_{\nu'n'}\rho) 4\pi\sigma(\varphi, \rho) \quad (12)$$

$$= 4\pi \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho d\rho d\varphi \cos \nu'(\varphi - \varphi') J_{\nu'}(k_{\nu'n'}\rho) \frac{1}{\rho'} \delta(\rho - \rho') \delta(\varphi - \varphi') \quad (13)$$

$$= 4\pi J_{\nu'}(k_{\nu'n'}\rho') \quad (14)$$

y obtenemos

$$A_{\nu'n'} = \frac{1}{a^2 J_{|\nu'|+1}^2(x_{\nu'n'}) k_{\nu'n'}} \left(1 - \frac{\delta_{\nu,0}}{2}\right) 4J_{\nu'}(k_{\nu'n'}\rho'). \quad (15)$$

Por último, reemplazando, llegamos a la función de Green

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_0(k_{0n}\rho) J_0(k_{0n}\rho')}{x_{0n} J_1^2(x_{0n})} e^{-k_{0n}|z-z'|} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos \nu(\varphi - \varphi') \frac{J_{\nu}(k_{\nu n}\rho) J_{\nu}(k_{\nu n}\rho')}{x_{\nu n} J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} e^{-k_{\nu n}|z-z'|} \right] \quad (16)$$

Pueden chequear este resultado a partir de lo que obtuvimos en el problema 14 para el cilindro finito de longitud L cuando usamos este mismo tipo de corte. Al tomar $L \rightarrow \infty$ deberían recuperar el resultado de arriba. Esto está indicado en el *inciso (iv)*, al final de la página 9, del apunte FT1_practica07.pdf de la clase del 21/09.

Pasemos ahora a considerar un corte en $\rho = \rho'$ (Fig. 2b, donde se entiende que ambos cilindros son infinitos). La base viene dada por $\{e^{ikz}, \cos \nu(\varphi - \varphi')\}$ y la densidad de carga sobre la superficie que divide es

$$\sigma(\varphi, z) = \frac{1}{\rho'} \delta(z - z') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (17)$$

Noten que en la expresión de arriba aparece ρ' y no la coordenada ρ , la prima indica la superficie que tiene radio ρ' . Además, así como cuando no tenemos base en una dirección cartesiana debemos considerar una combinación de exponenciales reales, cuando no tenemos base en la dirección radial debemos considerar una combinación de las funciones de Bessel modificadas

$$\{I_{\nu}(k\rho), K_{\nu}(k\rho)\}. \quad (18)$$

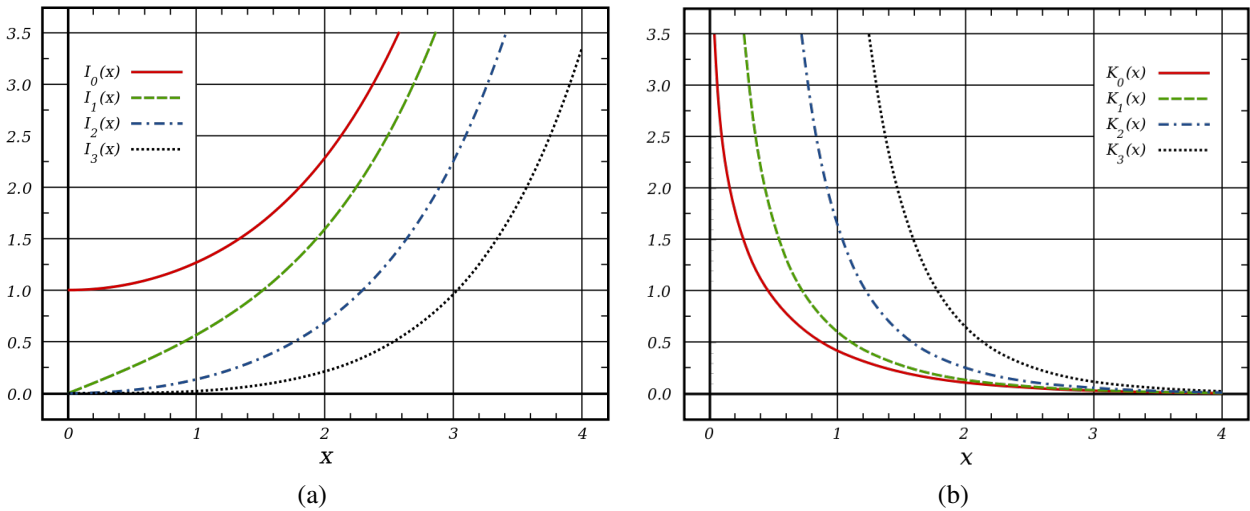


Figure 2: Funciones de Bessel Modificadas.

Es importante tener en cuenta que las funciones $I_\nu(x)$ son continuas en los reales y crecen exponencialmente con el argumento, mientras que las K_ν divergen en el origen y tienden a cero exponencialmente con el argumento. Debemos entonces descartar las K_ν para $\rho < \rho'$, y considerar una combinación de ambas para $\rho > \rho'$ que podemos escribir de la forma

$$c_1 K_\nu(k\rho) + c_2 I_\nu(k\rho), \quad (19)$$

y que debe anularse en $\rho = a$, o sea

$$c_1 K_\nu(ka) + c_2 I_\nu(ka) = 0 \implies c_2 = -c_1 \frac{K_\nu(ka)}{I_\nu(ka)}. \quad (20)$$

De este modo, la combinación que podemos usar es

$$c_1 K_\nu(k\rho) + c_2 I_\nu(k\rho) = \frac{c_1}{I_\nu(ka)} [I_\nu(ka)K_\nu(k\rho) - K_\nu(ka)I_\nu(k\rho)] \quad (21)$$

$$= \tilde{c} [I_\nu(ka)K_\nu(k\rho) - K_\nu(ka)I_\nu(k\rho)]. \quad (22)$$

Concluimos entonces que podemos expandir a la función de Green como

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(k) \cos \nu(\varphi - \varphi') e^{ikz} I_\nu(k\rho_{<}) (K_\nu(k\rho_{>})I_\nu(ka) - K_\nu(ka)I_\nu(k\rho_{>})). \quad (23)$$

Solo queda determinar las constantes $A_\nu(k)$ usando el salto en la derivada al atravesar la superficie que contiene la carga

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} \Big|_{\rho'^-} - \frac{\partial G}{\partial \rho} \Big|_{\rho'^+} = 4\pi\sigma(\varphi, z) \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(k) \cos \nu(\varphi - \varphi') e^{ikz} \times \quad (25)$$

$$[kI'_\nu(k\rho') (K_\nu(k\rho')I_\nu(ka) - K_\nu(ka)I_\nu(k\rho')) - I_\nu(k\rho') (K'_\nu(k\rho')I_\nu(ka) - K_\nu(ka)I'_\nu(k\rho'))] \quad (26)$$

$$= 4\pi\sigma(\varphi, z) \quad (27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(k) \cos \nu(\varphi - \varphi') e^{ikz} k I_\nu(ka) [I'_\nu(k\rho')K_\nu(k\rho') - I_\nu(k\rho')K'_\nu(k\rho')] = 4\pi\sigma(\varphi, z). \quad (28)$$

Usando la relación

$$[I'_\nu(x)K_\nu(x) - I_\nu(x)K'_\nu(x)] = \frac{1}{x} \quad (29)$$

podemos simplificar la expresión anterior

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(k) \cos \nu(\varphi - \varphi') e^{ikz} k \frac{I_\nu(ka)}{k\rho'} = 4\pi\sigma(\varphi, z). \quad (30)$$

Por último despejamos las constantes $A_\nu(k)$ usando la ortogonalidad de los cosenos ec. (7) y la de las exponenciales complejas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{iz(k-k')} = 2\pi\delta(k-k') \quad (31)$$

para obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \nu'(\varphi - \varphi') e^{-ik'z} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu'}(k') \cos \nu(\varphi - \varphi') e^{ikz} \frac{I_{\nu}(ka)}{\rho'} \quad (32)$$

$$= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \nu'(\varphi - \varphi') e^{-ik'z} \sigma(\varphi, z) \quad (33)$$

$$A_{\nu'}(k') = \frac{\rho'}{2\pi^2 I_{\nu'}(k'a)} \left(1 - \frac{\delta_{\nu',0}}{2}\right) 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi dz \cos \nu'(\varphi - \varphi') e^{-ik'z} \sigma(\varphi, z). \quad (34)$$

Solo queda resolver la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi dz \cos \nu'(\varphi - \varphi') e^{-ik'z} \sigma(\varphi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi dz \cos \nu'(\varphi - \varphi') e^{-ik'z} \frac{1}{\rho'} \delta(z - z') \delta(\varphi - \varphi') \quad (35)$$

$$= \frac{1}{\rho'} e^{-ik'z'} \quad (36)$$

y reemplazar en el despeje de los coeficientes

$$A_{\nu'}(k') = \frac{\rho'}{\pi I_{\nu'}(k'a)} \left(1 - \frac{\delta_{\nu',0}}{2}\right) 2 \frac{1}{\rho'} e^{-ik'z'} \quad (37)$$

Finalmente, la función de Green para el interior del cilindro infinito es

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \nu(\varphi - \varphi')}{(1 + \delta_{\nu,0})} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(z-z')} \frac{I_{\nu}(k\rho_{<})}{I_{\nu}(ka)} [K_{\nu}(k\rho_{>})I_{\nu}(ka) - K_{\nu}(ka)I_{\nu}(k\rho_{>})]. \quad (38)$$

Podemos chequear que el resultado anterior es una función real a partir de observar que el factor compuesto por funciones de Bessel es una función par en la variable de integración k (vean las propiedades que aparecen en FT1_practica07.pdf para mostrar que esto último es así). Como la parte imaginaria de $e^{ik(z-z')} = \cos k(z-z') + i \sin k(z-z')$ es una función impar en la variable de integración, al integrar entre $-\infty$ y $+\infty$ sólo queda la parte real, que es par en k . Como era de esperar, sólo aparecen $\cos k(z-z')$ en la expansión; esto muestra que la función es par respecto a z' , algo que pudimos haber asumido desde el inicio. Finalmente, podemos escribir

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \nu(\varphi - \varphi')}{(1 + \delta_{\nu,0})} \int_0^{\infty} dk \cos k(z-z') \frac{I_{\nu}(k\rho_{<})}{I_{\nu}(ka)} [K_{\nu}(k\rho_{>})I_{\nu}(ka) - K_{\nu}(ka)I_{\nu}(k\rho_{>})]. \quad (39)$$

El problema 15 continúa con la siguiente propuesta: *Encuentre también la función de Green para el problema externo utilizando el segundo tipo de corte. ¿Sabría cómo resolver el problema externo usando el primer tipo de corte?*

Queda para ustedes usar el mismo desarrollo de arriba (con base en dirección angular y en dirección z) para resolver el problema externo, esto es, para $\rho \in [a; \infty)$. Con la práctica de recién no deberían tener inconvenientes en el planteo. ¡Háganlo! y cualquier duda consúltenlo.

(Las dudas sí deberían surgirles cuando intenten plantear el problema externo utilizando el primer tipo de corte. Aviso: no se preocupen demasiado por este, *no vamos a usar el primer tipo de corte, en cilíndricas, para resolver problemas que no incluyen el origen*. De todas formas, en el Apéndice de estos apuntes, les dejamos una referencia para que vean cómo resolver problemas en cilíndricas que no incluyen el origen usando la base de funciones de Bessel.)

Problema 16

Consideremos el problema de la función de Green de un cuarto de cilindro infinito. Como vieron en la teórica usando separación de variables en coordenadas cilíndricas la función angular $Q(\varphi)$ debe satisfacer la ecuación

$$Q''(\varphi) + \nu^2 Q(\varphi) = 0 \quad (40)$$

y, en este caso, debe anularse en las paredes del cilindro que se hallan en $\varphi = 0$ y $\pi/2$:

$$Q(0) = Q(\pi/2) = 0. \quad (41)$$

Así, la solución debe ser la función trigonométrica que se anula en el origen

$$Q(\varphi) = \sin \nu \varphi \quad (42)$$

y al pedir que se anule en $\pi/2$ tenemos

$$\nu \frac{\pi}{2} = n\pi \implies \nu = 2n. \quad (43)$$

Luego, tomando como superficie que contenga a la carga unidad al plano $z = z'$, debemos expandir en una base en φ y ρ , que vendrá dada por las funciones trigonométricas recién halladas y las J_ν , ya que las N_ν se descartan pues la región contiene al origen. La función de Green se puede expandir como

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(2n\varphi) J_{2n}(k_{nm}\rho) e^{-k_{nm}|z-z'|} A_{nm}, \quad (44)$$

donde ya usamos que en z tenemos exponenciales reales que son finitas en $\pm\infty$ y son simétricas respecto de $z = z'$. Nuevamente obtendremos las constantes A_{nm} usando el salto de la derivada

$$\frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z'^-} - \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z'^+} = 4\pi\sigma(\varphi, \rho) \quad (45)$$

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \sin(2n'\varphi) \int_0^a d\rho \rho J_{2n'}(k_{n'm'}\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(2n\varphi) J_{2n}(k_{nm}\rho) 2k_{nm} A_{nm} \quad (46)$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin(2n'\varphi) \int_0^a d\rho \rho J_{2n'}(k_{n'm'}\rho) \sigma(\varphi, \rho) \quad (47)$$

y despejamos usando la ortogonalidad de los senos y las funciones de Bessel

$$A_{n'm'} = 4\pi \frac{2}{2k_{n'm'} (\pi/4) a^2 J_{2n'+1}^2(x_{n'm'})} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \sin(2n'\varphi) J_{2n'}(k_{n'm'}\rho) \sigma(\varphi, \rho) \quad (48)$$

$$= \frac{16}{x_{n'm'} a J_{2n'+1}^2(x_{n'm'})} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \sin(2n'\varphi) J_{2n'}(k_{n'm'}\rho) \frac{1}{\rho'} \delta(\rho - \rho') \delta(\varphi - \varphi') \quad (49)$$

$$= \frac{16}{x_{n'm'} a J_{2n'+1}^2(x_{n'm'})} \sin(2n'\varphi') J_{2n'}(k_{n'm'}\rho') \quad (50)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{16}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(2n\varphi) \sin(2n\varphi') \frac{J_{2n}(k_{nm}\rho) J_{2n}(k_{nm}\rho')}{x_{nm} J_{2n+1}^2(x_{nm})} e^{-k_{nm}|z-z'|}. \quad (51)$$

Otra forma de resolver este problema es usando el método de imágenes. En la práctica de la materia, hasta ahora, hemos coqueteado levemente con el método de imágenes. A partir de la clase que viene lo vamos a abordar con mayor rigurosidad, pero vamos a aprovechar este problema para comenzar a introducirlo, definitivamente, a nuestras vidas. Recuerden que una forma de anular el potencial de una carga puntual sobre un plano consiste en añadir otra carga de signo opuesto en la posición reflejada de la carga original respecto al plano que se quiere anular. Así, por ejemplo; conociendo la función de Green del cilindro completo, que llamaremos $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, podemos obtener una función para el medio cilindro, $G_{1/2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, que se anula en el plano definido por $\varphi = 0$. Para eso tomamos otra $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, pero con la coordenada angular reflejada $\varphi' \rightarrow -\varphi'$, y superponemos de la siguiente manera

$$G_{1/2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_1(\mathbf{r}, \rho', \varphi', z') - G_1(\mathbf{r}, \rho', -\varphi', z'), \quad (52)$$

en donde añadimos el signo menos delante del segundo término porque la carga allí debe tener signo opuesto, ver la Fig. 3a con el esquema gráfico de lo que acabamos de decir. La función $G_{1/2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la función de Green tipo Dirichlet en el medio cilindro infinito que cubre la región $0 \leq \varphi \leq \pi$ porque satisface

$$\nabla^2 G_{1/2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (53)$$

en la región interior al medio cilindro (con \mathbf{r}' dentro de la región), y porque tiene todas sus tapas a cero (la superficie curva lateral y la superficie plana lateral correspondiente a $\varphi = 0$, o $\varphi = \pi$, en este caso),

$$G_{1/2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\text{contornos}} = 0. \quad (54)$$

Podemos comprobar que esta función satisface la condición de contorno en la superficie plana usando la simetría de intercambio entre el punto campo y el punto fuente de la función de Green, esto es $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, entonces

$$G_{1/2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\varphi=0} = G_{1/2}(\mathbf{r}', \mathbf{r})|_{\varphi=0} = [G_1(\mathbf{r}', \rho, \varphi, z) - G_1(\mathbf{r}', \rho, -\varphi, z)]_{\varphi=0} \quad (55)$$

$$= G_1(\mathbf{r}', \rho, 0, z) - G_1(\mathbf{r}', \rho, 0, z) = 0. \quad (56)$$

Finalmente, para obtener la función de Green del cuarto de cilindro $G_{1/4}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ que se anula también en $\varphi = \pi/2$, debemos sumar las funciones de Green de las cargas anteriores reflejadas respecto de este plano y cambiarles el signo (Fig. 3b). Así, la función de Green resulta ser

$$G_{1/4}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_1(\mathbf{r}, \rho', \varphi', z') - G_1(\mathbf{r}, \rho', -\varphi', z') - G_1(\mathbf{r}, \rho', \pi - \varphi', z') + G_1(\mathbf{r}, \rho', \varphi' + \pi, z'), \quad (57)$$

queda para ustedes hacer el chequeo gráfico o analítico.

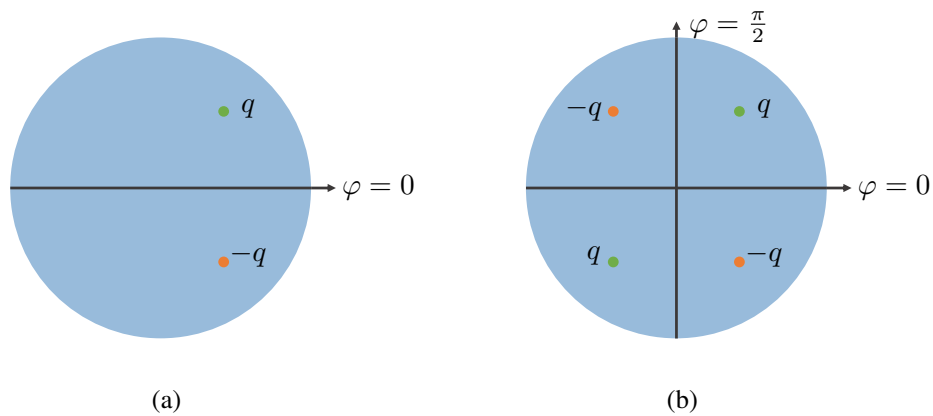
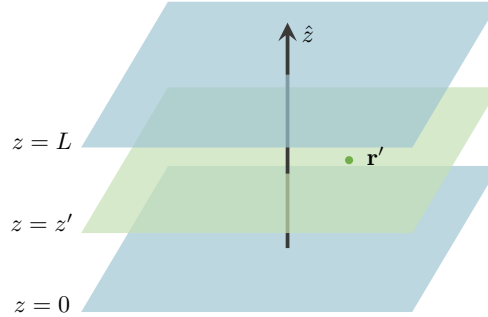


Figure 3: Método de imágenes para obtener la función de Green del medio o cuarto de cilindro

Problema 17

Tomamos un plano paralelo a los otros dos que contenga a la carga puntual, como muestra la figura



División en regiones para plantear la función de Green en el problema entre dos planos a potencial nulo.

Como ya vimos, la base de soluciones es $\{\cos \nu(\varphi - \varphi'), J_\nu(k\rho)\}$, y en z aparecen exponenciales reales. Necesitamos que el potencial se anule en $z = 0$, entonces elegimos $\sinh k_{\nu n}z$ en la región de abajo, mientras que para la región de arriba, $z' \leq z \leq L$, usamos $\sinh k(z - L)$ para anular el potencial en $z = L$. Además, para que resulte continua proponemos la combinación $\sinh(kz_{<}) \sinh k(z_{>} - L)$ y escribimos la función de Green como

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\nu=0}^{\infty} \cos \nu(\varphi - \varphi') \int_0^{\infty} dk J_\nu(k\rho) \sinh kz_{<} \sinh k(z_{>} - L) A_\nu(k). \quad (58)$$

Sólo falta pedir el salto en la derivada para obtener los coeficientes $A_\nu(k)$

$$\frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z'^-} - \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z'^+} = 4\pi\sigma(\varphi, \rho) \quad (59)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \cos \nu(\varphi - \varphi') J_\nu(k\rho) k [\cosh kz' \sinh k(z' - L) - \sinh kz' \cosh k(z' - L)] A_\nu(k) = 4\pi\sigma(\varphi, \rho) \quad (60)$$

y despejamos usando la ortogonalidad de los cosenos y funciones de Bessel correspondientes

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos \nu'(\varphi - \varphi') \int_0^{\infty} d\rho \rho J_{\nu'}(k'\rho) \sum_{\nu=0}^{\infty} \cos \nu(\varphi - \varphi') \int_0^{\infty} dk J_\nu(k\rho) k \sinh(-kL) A_\nu(k) \quad (61)$$

$$= 4\pi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho \cos \nu'(\varphi - \varphi') J_{\nu'}(k'\rho) \sigma(\varphi, \rho) \quad (62)$$

$$A_{\nu'}(k') = 4\pi \frac{1}{\pi \sinh(-kL)} \left(1 - \frac{\delta_{\nu',0}}{2}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \cos \nu'(\varphi - \varphi') J_{\nu'}(k'\rho) \sigma(\varphi, \rho) \quad (63)$$

$$= \frac{4}{\sinh(-kL)} \left(1 - \frac{\delta_{\nu',0}}{2}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \cos \nu'(\varphi - \varphi') J_{\nu'}(k'\rho) \frac{\delta(\rho - \rho') \delta(\varphi - \varphi')}{\rho'} \quad (64)$$

$$= \frac{4}{\sinh(-kL)} \left(1 - \frac{\delta_{\nu',0}}{2}\right) J_{\nu'}(k'\rho'). \quad (65)$$

Finalmente, reemplazamos los coeficientes obtenidos y expresamos la función de Green

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \nu(\varphi - \varphi')}{(1 + \delta_{\nu,0})} \int_0^{\infty} dk J_{\nu}(k\rho) J_{\nu}(k\rho') \frac{\sinh(k z_{<}) \sinh[k(L - z_{>})]}{\sinh(kL)} \quad (66)$$

Queda para ustedes resolver este problema con el otro tipo de corte y chequear ese resultado con el límite $a \rightarrow \infty$ del problema 14 que vimos en la clase del 21/09 [FT1_practica07.pdf, página 9, inciso (ii)].

En el ítem (b) se pide ubicar una carga q a una altura z' entre los planos y calcular las densidades de carga y las cargas totales inducidas sobre cada plano conductor. Para eso, podemos tomar la función de Green que acabamos de calcular y multiplicarla por q . Además, para simplificar el problema desde el inicio, podemos elegir que la carga se encuentra sobre eje z de manera que el potencial que produce en la región entre los dos conductores es

$$\Phi(\mathbf{r}) = 2q \int_0^{\infty} dk J_0(k\rho) \frac{\sinh(k z_{<}) \sinh[k(L - z_{>})]}{\sinh(kL)} \Big|_{z,z'} \quad (67)$$

mientras que el potencial es nulo arriba $z > L$, y abajo $z < 0$. Deben asegurarse de estar de acuerdo con la expresión de anterior; no depende del ángulo pues la carga está sobre el eje (simetría de rotación), y se usó que $J_0(0) = 1$. La densidad de carga superficial sobre el conductor ubicado en $z = 0$ es

$$\sigma_0(\rho) = \frac{1}{4\pi} (-\partial_z \Phi(\mathbf{r})|_{z=0^+} + \partial_z \Phi(\mathbf{r})|_{z=0^-}) = -\frac{1}{4\pi} \partial_z \Phi(\mathbf{r})|_{z=0^+} \quad (68)$$

$$= -\frac{q}{2\pi} \int_0^{\infty} dk J_0(k\rho) k \frac{\sinh[k(L - z')]}{\sinh(kL)}. \quad (69)$$

Para obtener la carga total Q_0 sobre el conductor, integramos en toda la superficie del plano

$$Q_0 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho \rho \sigma_0(\rho) \quad (70)$$

$$= -q \int_0^{\infty} dk k \frac{\sinh[k(L - z')]}{\sinh(kL)} \int_0^{\infty} d\rho \rho J_0(k\rho) \quad (71)$$

$$= -q \int_0^{\infty} dk k \frac{\sinh[k(L - z')]}{\sinh(kL)} \frac{\delta(k)}{k} \quad (72)$$

$$= -q \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sinh[k(L - z')]}{\sinh(kL)} \quad (73)$$

$$= -q \left(1 - \frac{z'}{L}\right) \quad (74)$$

Observen que en (72) usamos que la delta asociada a la variable radial de cilíndricas cumple

$$\int_0^{\infty} dk \delta(k) f(k) = f(0) \quad (75)$$

Operando análogamente para el plano en $z = L$, tenemos

$$\sigma_L(\rho) = \frac{1}{4\pi} \partial_z \Phi(\mathbf{r})|_{z=L^-} \quad (76)$$

$$= -\frac{q}{2\pi} \int_0^{\infty} dk J_0(k\rho) k \frac{\sinh(kz')}{\sinh(kL)} \implies Q_L = -q \frac{z'}{L} \quad (77)$$

Podemos observar que la carga total es $q + Q_0 + Q_L = 0$, algo que podemos chequear a partir de encerrar (hipotéticamente) al sistema de la configuración con una superficie de Gauss: como el campo es nulo por arriba y por abajo, la carga encerrada es cero.

Finalmente, el ítem (c)* nos hace observar que si bien la densidad superficial no tiene una expresión muy simple, el resultado para la carga total es llamativamente simple: Es una función lineal de la altura z' de la carga de prueba q . La carga total sobre cada plano puede obtenerse de consideraciones más generales que no requieren calcular el potencial explícitamente. Lo que se usa es el llamado Teorema de Reciprocidad. Entre los problemas del capítulo 1 del Jackson figura este teorema y su aplicación al caso de los dos planos. En la tercera edición son los problemas 1.12 y 1.13. Quedan propuestos como problemas *opcionales*, así como todos los ejercicios o ítems *asteriscos* que aparezcan en las guías de problemas.

Apéndice: Problema entre dos cilindros con condiciones homogéneas en los laterales y no homogéneas en las tapas.

Dejamos una parte del libro de Smythe, “Static and Dynamic Electricity”, por si tienen intriga de cómo plantar y resolver esta clase de ejercicios. Lo que Smythe llama $Y_\nu(k\rho)$ es la función de Neumann $N_\nu(k\rho)$:

5.304. Potential inside Hollow Cylindrical Ring.—As another example, let us find the potential at any point in the region bounded by the two cylinders $\rho = a$ and $\rho = b$, both of which are at zero potential, and the two planes $z = 0$ at potential zero and $z = c$ at potential $V = f(\rho)$. Since both $\rho = 0$ and $\rho = \infty$ are excluded, we may have both $J_0(k\rho)$ and $Y_0(k\rho)$. From 5.291 (5) and 5.293 (6), it is evident that a solution of Laplace’s equation which satisfies the boundary conditions at $z = 0$ and $\rho = b$ is given by

$$V_k = A_k \sinh(\mu_k z) \left[J_0(\mu_k \rho) - \frac{J_0(\mu_k b)}{Y_0(\mu_k b)} Y_0(\mu_k \rho) \right] \quad (1)$$

We can satisfy the conditions $V_k = 0$ at $\rho = a$ by choosing values of μ_k so that

$$J_0(\mu_k a) - \frac{J_0(\mu_k b)}{Y_0(\mu_k b)} Y_0(\mu_k a) = 0$$

Hence, all the boundary conditions except that at $z = c$ will be satisfied by a sum of such solutions

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \quad (2)$$

The final boundary condition $V = f(\rho)$ at $z = c$ will be satisfied if we choose A_k so that

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sinh \mu_k c \left[J_0(\mu_k \rho) - \frac{J_0(\mu_k b)}{Y_0(\mu_k b)} Y_0(\mu_k \rho) \right]$$

Represent the term in brackets by $R_0(\mu_k \rho)$, since it satisfies Bessel’s equation, multiply through by $\rho R_0(\mu_k \rho)$ where $R_0(\mu_k a) = R_0(\mu_k b) = 0$, and integrate from a to b . Since $R_0(\mu_k a) = R_0(\mu_k b) = 0$, we see from 5.296 (5) that all terms on the right drop out except the one for which $k = s$. For this term, we have, by 5.296 (6),

$$\int_a^b \rho f(\rho) R_0(\mu_k \rho) d\rho = \left[b^2 \left(\frac{dR_0}{d(\mu_k \rho)} \right)_{\rho=b}^2 - a^2 \left(\frac{dR_0}{d(\mu_k \rho)} \right)_{\rho=a}^2 \right] \frac{A_k \sinh \mu_k c}{2}$$

Differentiating $R_0(\mu_k \rho)$ by 5.302 (1), we have

$$R_0'(\mu_k \rho) = - \left\{ J_1(\mu_k \rho) - \frac{J_0(\mu_k b)}{Y_0(\mu_k b)} Y_1(\mu_k \rho) \right\}$$

Solving for A_k gives

$$A_k = \frac{2 \int_a^b \rho f(\rho) R_0(\mu_k \rho) d\rho}{\{b^2 [R_0'(\mu_k b)]^2 - a^2 [R_0'(\mu_k a)]^2\} \sinh \mu_k c} \quad (3)$$

Substituting (3) in (1) and then (1) in (2) gives the required solution.

If we wish the potential inside the earthed cylinder $\rho = a$ with $V = 0$ when $z = 0$ and $V = f(\rho)$ when $z = c$, we drop the Y_0 term in (1), and (3) becomes

$$A_k = \frac{2 \int_0^a \rho f(\rho) J_0(\mu_k \rho) d\rho}{a^2 [J_1(\mu_k a)]^2 \sinh \mu_k c} \quad (4)$$

Errata de versiones anteriores:

- En las ecuaciones (10-13) el límite de integración superior del radio pasó de ∞ a a .
- En las ecuaciones (46-49) los límites de integración pasaron a ser ρ entre 0 y a y φ entre 0 y $\pi/2$.
- En la ecuación (57) se corrigió $G_{1/2}$ por $G_{1/4}$.