

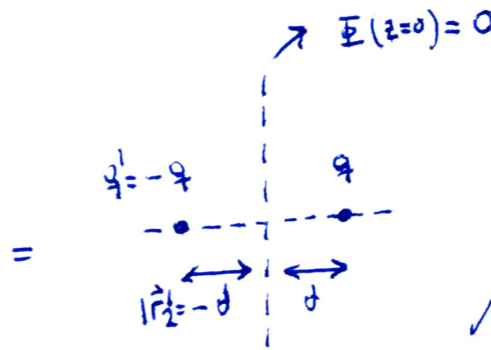
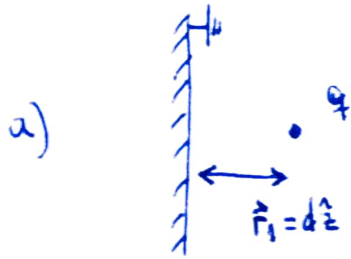
Método de imágenes

(o distribución de cargas)

Este método concierne con el problema de 1 o más cargas puntuales en presencia de superficies de contorno (conductores a tierra o a potenciales fijos). Bajo condiciones favorables es posible inferir a partir de la geometría del problema el lugar de ciertas cargas imágenes externas a la región de interés.

(o distribución de cargas imágenes)

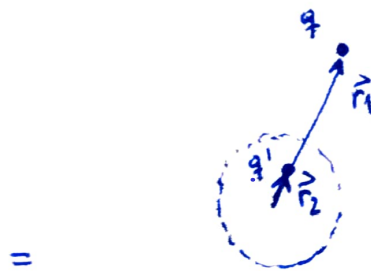
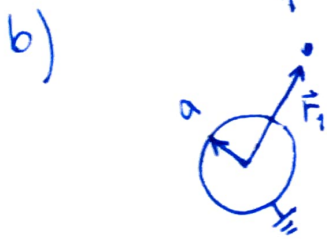
Ejemplos simples:



$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - d\hat{z}|} + \frac{(-q)}{|\vec{r} + d\hat{z}|}$$

• solución a Laplace en el volumen de interés

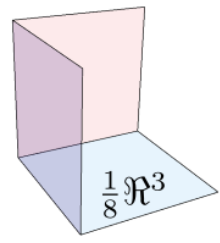
- ✓ $\Phi(z=0) = 0$
- ✓ vale Poisson dentro de volumen de interés



$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}$$

- pidiendo que $\Phi(r=a) = 0$:
- $$q' = -\frac{a}{r_1} q ; \quad r_2 = \frac{a^2}{r_1}$$

Problema 18



El octante:

$$0 \leq x, y, z < \infty$$

Assumamos conocida la función de Green de todo el espacio no rotado:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \quad \text{con} \quad \vec{r}' = (x', y', z') \quad \text{es dato.}$$

Consejo: calcular $G(r, r')$ para el octante usando separación de variables.

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}, \vec{r}'_1) - G(\vec{r}, \vec{r}'_2) - G(\vec{r}, \vec{r}'_3) + G(\vec{r}, \vec{r}'_4) \\ \uparrow \\ \text{octante} \quad - G(\vec{r}, \vec{r}'_5) + G(\vec{r}, \vec{r}'_6) - G(\vec{r}, \vec{r}'_7) + G(\vec{r}, \vec{r}'_8)$$

Carga real

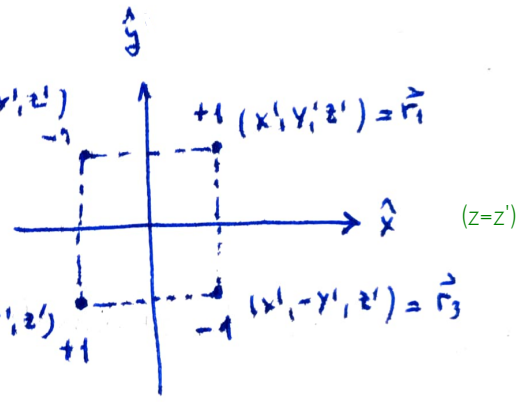
$$\vec{r}'_1 = (x', y', z')$$

$$\vec{r}'_2 = (-x', y', z')$$

Cargas imagenes

$$\vec{r}'_3 = (x', -y', z')$$

$$\vec{r}'_4 = (-x', -y', z')$$



De manera análoga para sistema de encima el plano $z=0$:

($x=x'$)

$$\begin{cases} \vec{r}'_5 = (x', y', -z') \\ \vec{r}'_6 = (x', -y', -z') \end{cases}$$

Cargas imagenes

$$\vec{r}'_7 = (-x', y', -z')$$

(opuesto en 3D)

$$\vec{r}'_8 = (-x', -y', -z')$$

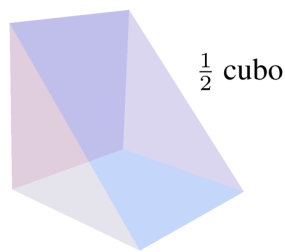
($y=y'$)

Queda de tres dequesar término a término (y kijos) que el resultado es el esperado!

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{76}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty dk_x dk_y \sin(kx) \sin(ky) \sin(kx') \sin(ky') f_k(z, z')$$

$$f_k = \frac{\sinh(kz) \cosh(kz')}{k} e^{-kz}$$

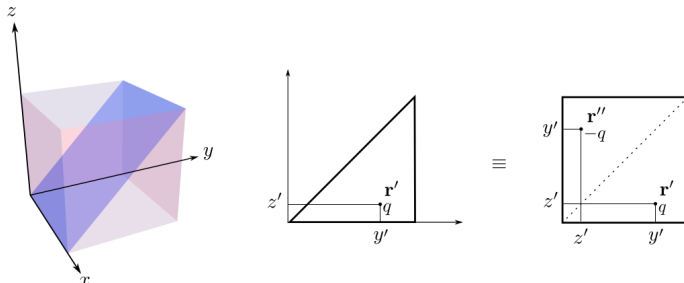
Problema 18



Cuña: la mitad de un cubo de lado a

Asumimos conocida la función de Green del cubo entero: $G_c(\vec{r}, \vec{r}')$

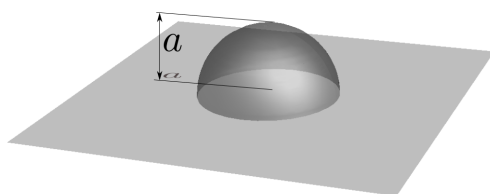
1er clase separación de variables



$$\Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = G_c(\vec{r}, \vec{r}') - G_c(\vec{r}, \vec{r}'')$$

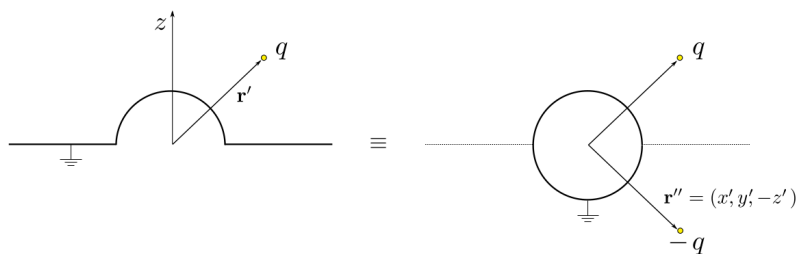
Medio y cuarto cilindro están en la clase 08, en el contexto del problema 16.

Problema 19



Contorno mixto

Asumimos conocida la función de Green de la esfera a tierra: $G_E(\vec{r}, \vec{r}')$



$$\Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = G_E(\vec{r}, \vec{r}') - G_E(\vec{r}, \vec{r}'')$$

donde $\vec{r}' = (x', y', z')$
 $\vec{r}'' = (x', y', -z')$

vale verificar que la solución es válida solo para $z \geq 0$

Método de Green

$$\Phi(\vec{r}) = \underbrace{\int_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV'}_{\text{Información de lo que ocurre dentro de } V} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint_S [G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}] ds'}_{\text{Información sobre la superficie}}$$

donde $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad / \quad \nabla^2 F(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{en } V$

La libertad introducida por $F(\vec{r}, \vec{r}')$ nos permite hacer depender la integral de superficie exclusivamente del tipo de dato de c.c. Por ejemplo:

condiciones de Dirichlet: $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r}' \in S \rightarrow$ multiplica el 2º término

condiciones de Neumann: $\frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{r}, \vec{r}')|_S = -\frac{1}{4\pi} \rightarrow$ multiplica el 3º término
 $\hookrightarrow \langle \psi \rangle_S (=0)$

Comentarios:

1) Todo se reducirá a calcular $G(\vec{r}, \vec{r}')$ basándonos en la forma geométrica de S .

2) $F(\vec{r}, \vec{r}')$ representa el potencial creado por un sistema de carga exterior a V .
Lo podemos conceptualizar como una distribución externa a V elegida de tal forma
 \downarrow el potencial debido a

que satisfaga las cond. de contorno en S (potencial o derivada) y combi-
narla con el potencial debido a la carga puntual unitaria en \vec{r}' .

3) Luego, el método de imágenes es físicamente equivalente a determinar la
 $F(\vec{r}, \vec{r}')$ apropiada que satisfaga las cond. de contorno.

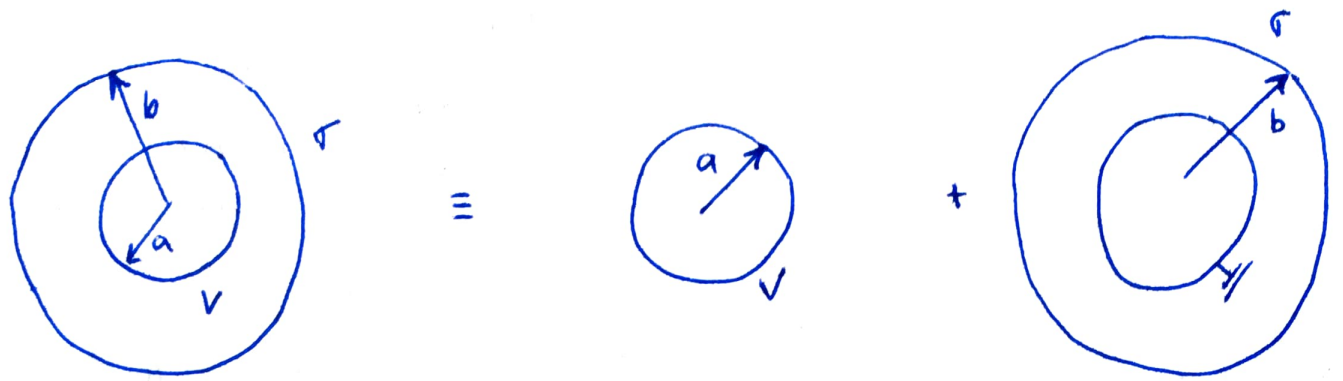
El fantasma de Green

The Miller of Nottingham

The theory developed in this section first appeared in an 1828 memoir by George Green (1793-1841) entitled *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. The *Essay* is remarkable, not least because the young Green received only one year of schooling before he was apprenticed to his father's flour mill. Only at the age of 30 did Green join the Nottingham Subscription Library and discover higher mathematics through the works of Laplace, Lagrange, Legendre, and Poisson. Greatly stimulated, Green worked out his ideas and published his 72-page *Essay* (privately) for a subscription list of local notables. It received little attention and the discouraged Green returned to milling. A few years later, he followed the advice of friends and entered Cambridge as a 40-year-old undergraduate. Green graduated in 1837 and quickly published six papers on hydrodynamics, acoustics, and optics before returning abruptly to Nottingham in 1841. He died there at the age of 47, almost entirely unknown. William Thomson (later Lord Kelvin) found a copy of the *Essay* just after his own graduation from Cambridge in 1845. He arranged for its publication (in Germany) in 1850. Riemann coined the term "Green function" soon thereafter. The first widely seen edition in English was published in 1871.

- La edad no determina la capacidad o potencialidad científica.
- Siempre te puedes cruzar con un boludo que te desmotive.
- La ciencia es una construcción colectiva, nunca individual.
- Nuevamente, la ciencia es una *construcción colectiva*.

Problema 2o b): usar el método de Green para el problema 1o.

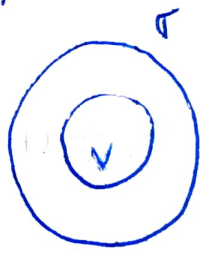


Es decir, $\Phi(\vec{r}) = \Phi_{cc}(\vec{r}) + \Phi_{\sigma}(\vec{r})$ usando superposición

problema 1o: $\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Va}{r} + \frac{Q'}{r} + \frac{Q}{r(b)} & r \geq a \\ V & r \leq a \end{cases}$; $\begin{cases} Q = 4\pi b^2 \sigma \\ Q' = -\frac{a}{b} Q \\ r_{>}^{(b)} = \max\{r, b\} \end{cases}$

Ahora, resolveremos el mismo problema usando el método de la función de Green.

En general, la solución del problema de Dirichlet puede escribirse como:

$$\Phi(\vec{r}) = \underbrace{\int_V d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}')}_{\text{región donde queremos conocer } \Phi} - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} d^2r' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}}_{\text{su frontera}} \Phi(\vec{r}')$$


Para el caso particular del problema 1o:

- 1) Las cargas del volumen están distribuidas sobre superficie Σ de radio b .
- 2) En la frontera, el valor del potencial es dato $\Phi_S(\vec{r})$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = \underbrace{\int_{\Sigma} d^2r' G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}')}_{\Phi_V(\vec{r})} - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint_S d^2r' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}}_S \Phi(\vec{r}')$$

$$\Rightarrow \Phi_V(\vec{r}) = \int_{r'=b} d^2\Omega G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') = \int b^2 d\Omega G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma$$

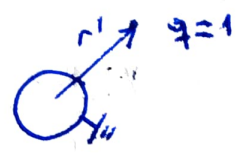
\downarrow la contribución en volumen \downarrow la función de Green de una casaca esféricamente simétrica a tierra.

$Q_{\text{ext}} \cdot q=1$

notar que: $G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \left[\frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{2\ell+1}} - \frac{a^{2\ell+1}}{(r'r)^{2\ell+1}} \right]$

Hay dos maneras de computar $G(\vec{r}, \vec{r}')$:

1) Hacer el cálculo explícito:



2) Usar el resultado del problema 10 a) cuando $b \rightarrow +\infty$ (ver video de Mateo).

$$\Rightarrow \Phi_V(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \frac{4\pi\sigma}{2\ell+1} \left[\frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{2\ell+1}} - \frac{a^{2\ell+1}}{(r'r)^{2\ell+1}} \right] \Big|_{r'=b} \left[Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \int b^2 d\Omega' Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \right]$$

$$\cdot Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \int b^2 d\Omega' Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') = b^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' d\varphi' Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi')$$

↑ pueden integrar por $Y_{00}(\theta', \varphi')$ hay un

$$= b^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \sqrt{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' d\varphi' Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{00}(\theta', \varphi')$$

$$= b^2 \int_{\Omega} d\Omega_0$$

$$\Rightarrow \Phi_V(\vec{r}) = 4\pi b^2 \sigma \left(\frac{1}{r_{>}} - \frac{a}{br} \right) = a \left(\frac{1}{r_{>^{(b)}}} - \frac{a}{br} \right)$$

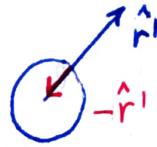
$$\downarrow \max\{r, b\} = \frac{Q}{r_{>^{(b)}}} + \frac{Q'}{r}$$

Por otro lado, la contribución de la integral sobre la frontera:

$$\Phi_S(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S d^2r' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \hat{n}'} \Phi(\vec{r}')$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{r'=a} a^2 d\Omega' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial (-\hat{r}')} V$$

Es la normal a la superficie en cuestión, en este caso en $r=a$



Antes de derivar, notemos que:

$$\frac{r^l}{r^{2l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{(rr')^{2l+1}} =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r^{2l+1}} \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{2l+1}} \right) & r' < r \\ \frac{1}{r^{2l+1}} \left(r^{2l+1} - \frac{a^{2l+1}}{r^{2l+1}} \right) & r' > r \end{cases}$$

Como la integral la hacemos sobre $r'=a$, usamos

$$\left. \begin{matrix} r' < r: & r_{<} = r' \\ r' > r: & r_{>} = r \end{matrix} \right\}$$

$$\Phi_S(\vec{r}) = +\frac{1}{4\pi} V \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} (2l+1) \frac{a^{2l+1}}{r^{2l+1}} \left[Y_{lm}(\theta, \varphi) \int a^2 d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \right]$$

$$= \frac{Va}{r}$$

a^2 de donde

Interpretemos:

$$\text{problema 10: } \Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Va}{r} + \frac{Q'}{r} + \frac{Q}{r_{>}} & r \geq a \\ V & r \leq a \end{cases}$$

Les queda de tarea recuperar esta expresión colapsando las deltas y la parte radial de cada potencial.

Problema 20 a:

resolver el problema 5 usando el resultado en el problema 6a y 6b.

Aquí usaremos el resultado del problema 6a:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y e^{i(k_x x + k_y y)} \phi(k_x, k_y) f_{k_x k_y}(z-z')$$

donde:
$$\begin{cases} \phi(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} e^{-i(k_x x' + k_y y')} \\ f_{k_x k_y}(z-z') = \frac{e^{-|z-z'|}}{k} \end{cases}, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$G(\vec{r}, \vec{r}')$ es la función de Green del espacio no acotado en cartesianas.

Para los retagados:

elegimos \hat{x} e \hat{y} como direcciones donde expandimos $\Phi(\vec{r})$

$$\Phi(\vec{r}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y e^{i(k_x x + k_y y)} \begin{cases} A^I e^{kz} + B^I e^{-kz} & z \geq z' \\ C^II e^{kz} + D^II e^{-kz} & z \leq z' \end{cases} \quad k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$$

1) $\Phi^I(z \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \Rightarrow A^I = 0$ 2) $\Phi^{II}(z \rightarrow -\infty) \rightarrow 0 \Rightarrow D^{II} = 0$

3) $\Phi^I(z=z') = \Phi^{II}(z=z')$

usando el truco:
$$\left. \begin{aligned} B^I e^{-kz} &\rightarrow A_{k_x k_y} e^{-kz} \\ C^II e^{kz} &\rightarrow A_{k_x k_y} e^{kz} \end{aligned} \right\} A_{k_x k_y} e^{-k|z-z'|}$$

4)
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=z'-} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=z'+} = 4\pi \delta(x-y)$$

$$2k A_{k_x k_y} = 4\pi \hat{\Delta}(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-i(k_x x + k_y y)} \delta(x-x') \delta(y-y')$$
(6)

$$\therefore G(\vec{r}, \vec{r}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y')] - k|z-z'|} \frac{e}{2\pi k}$$

Esta es la función de Green con cond. de Dirichlet en el espacio no acotado. Entonces:

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V p(\vec{r}') G_D(\vec{r}, \vec{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{r}, \vec{r}') dS'$$

donde: $p(\vec{r}') = \sigma \theta(x' - \frac{a}{2}) \theta(x' + \frac{a}{2}) \theta(y' - \frac{a}{2}) \theta(y' + \frac{a}{2}) \delta(z')$
↓ funciones de Heaviside

$$\Phi(\vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r}' \in S$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi(\vec{r}) &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' dy' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \sigma e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y')] - k|z|} \frac{e}{2\pi k} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \frac{e}{2\pi k} e^{-k|z|} e^{i(k_x x + k_y y)} \underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' e^{-ik_x x'}}_{\frac{2}{k_x} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right)} \underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' e^{-ik_y y'}}_{\frac{2}{k_y} \sin\left(\frac{k_y a}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\therefore \Phi(\vec{r}) = \frac{2\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \frac{e^{i(k_x x + k_y y) - k|z|}}{k_x k_y k} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\frac{k_y a}{2}\right)$$

que obviamente es el mismo resultado del problema 5. ♥