

## FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2020

### APUNTES DE LA PRÁCTICA DEL 30/09:

### GUÍA 2 - APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN DE GREEN Y MÉTODO DE IMÁGENES - PROBLEMAS 21 Y 22

## Problema 21

Se trata de un dipolo puntual con momento dipolar  $\mathbf{p} = p\hat{p}$ , ubicado en  $\mathbf{r}_0$  y frente a una esfera conductora a tierra de radio  $a < r_0$ .

(a) La primera propuesta es calcular el potencial electrostático en todo el espacio utilizando el método de la función de Green. Como es una esfera conductora a tierra, el potencial en el interior es nulo. Se trata entonces de calcular el potencial en el exterior. La idea es que si conocemos la función de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  de la región exterior a la esfera, podemos encontrar el potencial generado por cualquier distribución de carga  $\rho(\mathbf{r})$  que coloquemos en la región exterior a partir de la integral

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_S d^2r' \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}, \quad (1)$$

donde  $V$  representa el volumen de la región correspondiente a la función de Green de Dirichlet específica  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  (en este caso es el exterior a la esfera de radio  $a$ ), y  $S \equiv \partial V$  es la superficie, o borde, de la región (en este caso es la esfera de radio  $a$  y el infinito). Como el potencial se anula sobre la superficie de la esfera en nuestro problema (y también en infinito), tenemos  $\Phi(\mathbf{r}')|_S = 0$ , y entonces la integral se reduce a

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{r>a} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (2)$$

La función de Green para el exterior de una esfera a tierra es

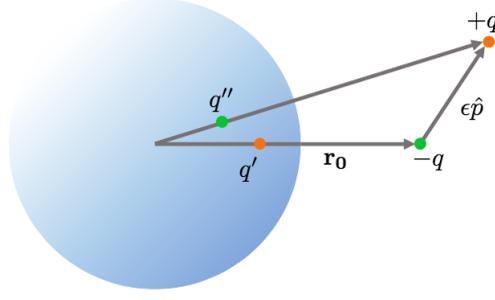
$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|}. \quad (3)$$

Esta expresión la vimos en la clase práctica09, obtenida a partir del método de imágenes, o bien se puede obtener por separación de variables en esféricas como lo hicimos en el video de Mateo, práctica06. Por otro lado la densidad volumétrica del dipolo puntual  $\mathbf{p}$  se puede obtener pensando en dos cargas puntuales de magnitud  $q$  de distinto signo, con la negativa ubicada en  $\mathbf{r}_0$  y la positiva en  $\mathbf{r}_0 + \epsilon\hat{p}$ , en el límite de separación  $\epsilon \rightarrow 0$ . Esto es,

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q [\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \epsilon\hat{p}) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q \epsilon \frac{\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \epsilon\hat{p}) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\epsilon} \quad (4)$$

$$= -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (5)$$

como vieron en la primera clase teórica del curso.



Además, ese día en la teórica, vieron que dada una distribución  $g$  definimos su derivada  $g'$  como

$$\int f(x)g'(x)dx := - \int f'(x)g(x)dx \quad \forall f, \quad (6)$$

que venía inspirada en la integración por partes de funciones <sup>1</sup>. Introduciendo esto último en la ecuación (2) la cuenta que debemos hacer, es

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \int_{r>a} d^3\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \quad (7)$$

$$= \int_{r>a} d^3\mathbf{r}' (\mathbf{p} \cdot \nabla' G)(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \quad (8)$$

$$= (\mathbf{p} \cdot \nabla' G)(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \mathbf{p} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0} - \mathbf{p} \cdot \nabla' \left( \frac{a}{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|} \right) \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0}, \quad (9)$$

donde la prima en el gradiente indica que debemos derivar respecto de  $\mathbf{r}'$ . Usando que

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{\hat{r}}{r^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (10)$$

podemos calcular

$$\nabla' \left( \frac{a}{r'} \frac{(-1)}{|\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|} \right) = \left( \nabla' \frac{a}{r'} \right) \frac{(-1)}{|\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|} + \frac{a}{r'} \nabla' \frac{(-1)}{|\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|}. \quad (11)$$

$$= \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \frac{a}{|\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|} + \frac{a}{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|^2} \nabla' |\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'| \quad (12)$$

escribiendo

$$|\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + \frac{a^4}{r'^2} - 2 \left( \frac{a}{r'} \right)^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \quad (13)$$

$$\implies \nabla' |\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'| = \frac{1}{2|\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|} \left[ -2 \frac{\mathbf{r}'}{r'^4} a^4 + 4 \frac{a^2}{r'^4} \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') - 2 \left( \frac{a}{r'} \right)^2 \mathbf{r} \right] \quad (14)$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|} \left[ -\frac{\mathbf{r}'}{r'^4} a^4 + 2 \frac{a^2}{r'^4} \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') - \left( \frac{a}{r'} \right)^2 \mathbf{r} \right]. \quad (15)$$

<sup>1</sup>Para quienes les interese adentrarse un poco más en la parte formal matemática, ya sea de cómo darle sentido a una ecuación diferencial cuando la solución no necesariamente es derivable en todo punto, formulación débil, y cómo eso se conecta con la teoría de distribuciones, su definición más formal, la derivada débil, etc. les recomiendo este apunte de Bonder para la materia ecuaciones diferenciales <http://mate.dm.uba.ar/~jfbonder/papers/EDPs.pdf>.

En principio con esto sería suficiente para terminar la cuenta pero vamos a definir  $\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \frac{a^2}{r_0^2}\mathbf{r}_0$ , para reemplazar  $\mathbf{r} = \mathbf{R}' + \frac{a^2}{r_0^2}\mathbf{r}_0$ , en

$$\begin{aligned} (\nabla'|\mathbf{r} - (a/r')^2\mathbf{r}'|) \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0} &= \frac{1}{R'} \left[ -\frac{\mathbf{r}_0}{r_0^4}a^4 + 2\frac{a^2}{r_0^4}\mathbf{r}_0(\mathbf{R}' \cdot \mathbf{r}_0) + 2\frac{a^4}{r_0^6}\mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0) - \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 \mathbf{R}' - \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 \frac{a^2}{r_0^2}\mathbf{r}_0 \right] \\ &= \frac{1}{R'} \left[ -\frac{\mathbf{r}_0}{r_0^4}a^4 + 2\frac{a^2}{r_0^2}\hat{r}_0(\mathbf{R}' \cdot \hat{r}_0) + 2\frac{a^4}{r_0^4}\mathbf{r}_0 - \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 \mathbf{R}' - \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 \frac{a^2}{r_0^2}\mathbf{r}_0 \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{R'} \frac{a^2}{r_0^2} [2\hat{r}_0(\mathbf{R}' \cdot \hat{r}_0) - \mathbf{R}']. \quad (17)$$

Reemplazando entonces (17) en (12) y esta a su vez en (9) obtenemos finalmente el potencial buscado

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{a^3}{r_0^3} [2(\mathbf{p} \cdot \hat{r}_0)\hat{r}_0 - \mathbf{p}] \cdot \frac{\mathbf{R}'}{R'^3} + \frac{a}{r_0^3} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0}{R'} \quad (18)$$

El primer término en el resultado de arriba corresponde al dipolo original  $\mathbf{p}$  ubicado en  $\mathbf{r}_0$ , el segundo y el tercero corresponden a la contribución del conductor esférico a tierra en esta configuración. Posponemos el análisis de este resultado hasta el final del siguiente ítem donde resolvemos el problema mediante el método de imágenes.

El ítem (b) del problema pide calcular el potencial en el exterior del conductor mediante el método de imágenes. Sabemos usar el método de imágenes para escribir el potencial de una carga puntual frente a una esfera a tierra, aquí, la idea es usar ese resultado para construir la solución del dipolo frente a la esfera. Para eso recordemos que podemos definir un dipolo puntual  $\mathbf{p}$  en la posición  $\mathbf{r}_0$  a partir de dos cargas puntuales  $-q$ , en  $\mathbf{r}_0$ , y  $+q$ , en  $\mathbf{r}_0 + \epsilon\hat{p}$ , en el límite en el que  $\epsilon \rightarrow 0$ , con  $\epsilon q = p$  finito. Teniendo en cuenta esta noción, vamos a resolver el problema de un dipolo frente a una esfera a potencial nulo a partir de pensar en el problema de las dos cargas  $-q$  y  $+q$  frente a la esfera a tierra mediante el método de imágenes, y luego tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Sabemos que para una carga  $-q$  en una posición  $\mathbf{r}_0$  frente a una esfera a tierra de radio  $a$  se necesita una carga imagen de valor

$$q' = \frac{a}{r_0}q \quad (19)$$

en la posición

$$\mathbf{r}' = \frac{a^2}{r_0^2}\mathbf{r}_0 \quad (20)$$

para tener la esfera de radio  $a$  a potencial cero. Por otro lado, análogamente, a la carga ubicada en  $\mathbf{r}_0 + \epsilon\hat{p}$  le corresponderá una carga imagen

$$q'' = -q \frac{a}{|\mathbf{r}_0 + \epsilon\hat{p}|} \quad (21)$$

en la posición

$$\mathbf{r}'' = \frac{a^2}{|\mathbf{r}_0 + \epsilon\hat{p}|^2}(\mathbf{r}_0 + \epsilon\hat{p}). \quad (22)$$

El potencial buscado está dado por la superposición

$$\Phi(\mathbf{r}) = \left\{ \frac{-q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{q}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \epsilon \hat{p})|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right\}_{\epsilon \rightarrow 0} \quad (23)$$

En primer lugar veamos (como repaso) que los dos primeros términos corresponden al potencial de un dipolo puntual. Para eso expandimos en serie de Taylor el segundo término, esto es

$$\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \epsilon \hat{p}|} = \frac{q}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 - 2\epsilon \hat{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \epsilon^2}} \quad (24)$$

$$= \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{q\epsilon \hat{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (25)$$

y vemos que la suma del primer y segundo término da la expresión para el potencial del dipolo puntual  $\mathbf{p}$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{-q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{q}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \epsilon \hat{p})|} \right] = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (26)$$

Vamos a operar de forma análoga para los últimos dos términos de la superposición, correspondientes a las cargas imagen auxiliares que estamos utilizando. El tercer término lo vamos a escribir simplemente como

$$\frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q'}{R'} \quad (27)$$

en donde definimos  $\mathbf{R}' \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  por comodidad. Para escribir el cuarto término del potencial escribimos primero (21) como

$$q'' = \frac{-qa}{\sqrt{r_0^2 + 2\epsilon \hat{p} \cdot \mathbf{r}_0 + \epsilon^2}} \quad (28)$$

$$= -qa \left( \frac{1}{r_0} - \frac{\epsilon \hat{p} \cdot \mathbf{r}_0}{r_0^3} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (29)$$

de forma tal que en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  queda

$$q'' \rightarrow -q' + Q_{im} \quad (30)$$

donde llamamos

$$Q_{im} \equiv \frac{a}{r_0^3} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (31)$$

Por otra parte, para (22), tenemos

$$\mathbf{r}'' = \frac{a^2}{r_0^2 + 2\epsilon \hat{p} \cdot \mathbf{r}_0 + \epsilon^2} (\mathbf{r}_0 + \epsilon \hat{p}) \quad (32)$$

$$= \frac{a^2}{r_0^2} \mathbf{r}_0 + \left[ \frac{a^2}{r_0^2} \hat{p} - a^2 \frac{2\hat{p} \cdot \mathbf{r}_0}{r_0^4} \mathbf{r}_0 \right] \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (33)$$

$$= \mathbf{r}' + \mathbf{x}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (34)$$

en donde en la última igualdad identificamos que aparece  $\mathbf{r}' = \frac{a^2}{r_0^2} \mathbf{r}_0$  (la posición de la carga imagen auxiliar  $q'$ ), y llamamos  $\mathbf{x}$  a todo lo que quedó entre corchetes en (33). Vamos a usar esto para expresar el cuarto

término de la superposición,

$$\frac{q''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} = \frac{q''}{|\mathbf{R}' - \mathbf{x}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)|} \quad (35)$$

$$= q'' \left[ \frac{1}{R'} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}'}{R'^3} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \quad (36)$$

$$= (-q' + Q_{im}) \left[ \frac{1}{R'} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}'}{R'^3} \epsilon \right] + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (37)$$

$$= -\frac{q'}{R'} + \frac{Q_{im}}{R'} + \frac{\mathbf{p}_{im} \cdot \mathbf{R}'}{R'^3} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (38)$$

en donde en la última igualdad definimos

$$\mathbf{p}_{im} \equiv -q'\epsilon \mathbf{x} = \frac{a^3}{r_0^3} [2(\mathbf{p} \cdot \hat{r}_0) \hat{r}_0 - \mathbf{p}] \quad (39)$$

Sumando ambos términos, (27) y (38), en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , queda

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right] = \frac{Q_{im}}{R'} + \frac{\mathbf{p}_{im} \cdot \mathbf{R}'}{R'^3} \quad (40)$$

Así, el potencial electrostático del dipolo puntual frente a un conductor esférico es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{\mathbf{p}_{im} \cdot \mathbf{R}'}{R'^3} + \frac{Q_{im}}{R'} \quad (41)$$

$$= \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{\mathbf{p}_{im} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{Q_{im}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (42)$$

El potencial en la región exterior a la esfera conductora está dado por la contribución del dipolo puntual  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{r}_0$  (el dipolo exterior a la esfera), mas un dipolo imagen  $\mathbf{p}_{im}$  en  $\mathbf{r}'$  y un término monopolar adicional dado por la carga total imagen  $Q_{im}$  ubicada, también, en  $\mathbf{r}'$ . Las expresiones para  $Q_{im}$ , (31), y  $\mathbf{p}_{im}$ , (39), coinciden con lo obtenido en el ítem (a), (18).

(c) La densidad sobre la superficie del conductor se puede hallar usando en salto en la derivada del potencial

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \hat{r} \cdot \nabla \Phi|_{\mathbf{r}=a\hat{r}}. \quad (43)$$

Calculando el gradiente

$$\nabla \Phi = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - 3 \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^4} \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - \frac{a}{r_0^3} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0}{R'^2} \nabla |\mathbf{r} - (a/r_0)^2 \mathbf{r}_0| \quad (44)$$

$$- \left( 3 \frac{a^3}{r_0^3} [2(\mathbf{p} \cdot \hat{r}_0) \hat{r}_0 - \mathbf{p}] \cdot \frac{\mathbf{R}'}{R'^4} \right) \nabla |\mathbf{r} - (a/r_0)^2 \mathbf{r}_0| + \frac{a^3}{r_0^3} \frac{1}{R'^3} [2(\mathbf{p} \cdot \hat{r}_0) \hat{r}_0 - \mathbf{p}]. \quad (45)$$

Luego usando que

$$\nabla |\mathbf{r} - (a/r_0)^2 \mathbf{r}_0| = \frac{1}{|\mathbf{r} - (a/r_0)^2 \mathbf{r}_0|} \left[ r \hat{r} - \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 \mathbf{r}_0 \right] \quad (46)$$

obtenemos el gradiente

$$\nabla\Phi = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - 3\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} [r\hat{r} - \mathbf{r}_0] - \frac{a}{r_0^3} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0}{R'^3} \left[ r\hat{r} - \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 \mathbf{r}_0 \right] \quad (47)$$

$$- 3\frac{a^3}{r_0^3} \frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{p}}{R'^5} [2(\mathbf{p} \cdot \hat{r}_0)\hat{r}_0 - \mathbf{p}] \left[ r\hat{r} - \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 \mathbf{r}_0 \right] + \frac{a^3}{r_0^3} \frac{1}{R'^3} [2(\mathbf{p} \cdot \hat{r}_0)\hat{r}_0 - \mathbf{p}]. \quad (48)$$

Reemplazando esto en (43), se tiene

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\hat{r} \cdot \mathbf{p}}{|a\hat{r} - \mathbf{r}_0|^3} - 3\frac{\mathbf{p} \cdot (a\hat{r} - \mathbf{r}_0)}{|a\hat{r} - \mathbf{r}_0|^5} [a - \hat{r} \cdot \mathbf{r}_0] - \frac{a}{r_0^3} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0}{|a\hat{r} - (a/r_0)^2 \mathbf{r}_0|^3} \left[ a - \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 \hat{r} \cdot \mathbf{r}_0 \right] \right. \\ \left. - 3\frac{a^3}{r_0^3} \frac{(a\hat{r} - (a/r_0)^2 \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p}}{|a\hat{r} - (a/r_0)^2 \mathbf{r}_0|^5} [2(\mathbf{p} \cdot \hat{r}_0)\hat{r}_0 - \mathbf{p}] \left[ a - \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 \hat{r} \cdot \mathbf{r}_0 \right] + \frac{a^3}{r_0^3} \frac{1}{|a\hat{r} - (a/r_0)^2 \mathbf{r}_0|^3} [2(\mathbf{p} \cdot \hat{r}_0)\hat{r} \cdot \hat{r}_0 - \hat{r} \cdot \mathbf{p}] \right\} \quad (49)$$

Mientras que la carga total inducida sobre la superficie vendrá dada por

$$Q_{\text{ind}} = \int_{r=a} \sigma dS = \frac{1}{4\pi} \int_{r=a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{encerrada}} = Q_{im} = \frac{a}{r_0^3} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0. \quad (50)$$

El potencial y el campo eléctrico en el exterior de la esfera están dados por 3 términos que identificamos como dos dipolos puntuales (que no aportan carga neta) y un término monopolar con carga  $Q_{im}$  ubicado virtualmente dentro de la esfera. Cómo el campo por fuera de la esfera manifiesta esta carga total, la carga inducida en el conductor debe ser, necesariamente,  $Q_{im}$ .

(d) Se pide escribir el potencial para  $r \gg a$ , es decir, lejos de la esfera, conservando términos hasta orden  $r^{-2}$ . En realidad lo que quiere el enunciado es que lo hagamos lejos de todas las distribuciones de carga, esto es, lejos de la esfera y lejos del dipolo:  $r \gg r_0$ . Para eso lo que hay que usar es que:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^*}{r^3} \quad (51)$$

y que

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^3} \approx \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (52)$$

donde  $\mathbf{r}^*$  será  $\mathbf{r}_0$ , o bien  $\mathbf{r}' = \frac{a^2}{r_0^2} \mathbf{r}_0$ , según corresponda. De este modo tenemos que

$$\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \approx \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (53)$$

$$\frac{\mathbf{p}_{im} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \approx \frac{\mathbf{p}_{im} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (54)$$

$$\frac{Q_{im}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{Q_{im}}{r} + Q_{im} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \quad (55)$$

Poniendo todo junto, el potencial a orden  $1/r^2$ , queda

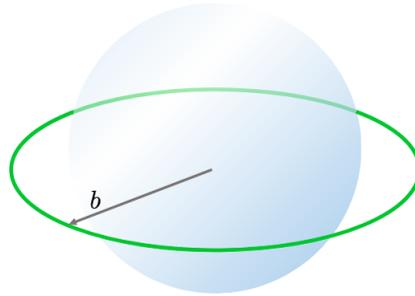
$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{Q_{im}}{r} + \underbrace{\left( \mathbf{p} + \mathbf{p}_{im} + Q_{im} \frac{a^2}{r_0^2} \mathbf{r}_0 \right)}_{\mathbf{P}_{total}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (56)$$

Esto corresponde a un término monopolar (el de orden  $1/r$ ) que contiene la carga total  $Q_{im}$  de la configuración (la que se induce en el conductor a tierra), y un término dipolar (el de orden  $1/r^2$ ) que contiene el momento dipolar total de la configuración, de magnitud  $\mathbf{P}_{total}$ . Los dipolos puntuales tienen carga neta nula y su momento dipolar, por ser el primer momento no nulo, es independiente de la posición. La carga neta del conductor se puede interpretar como una carga puntual desplazada del origen en  $\mathbf{r}' = \frac{a^2}{r_0^2} \mathbf{r}_0$ , por eso su momento dipolar en el desarrollo es igual a  $\mathbf{r}'Q_{im}$ .

(e) Se pide el potencial en el caso en que la esfera conductora esté aislada y descargada. Ahora deben verificarse dos condiciones: que la carga total del conductor sea nula y que el potencial sea constante sobre el conductor. Una forma de satisfacer ambas condiciones es superponer a la solución del problema anterior una carga puntual de valor  $-Q_{ind}$  en el centro de la esfera. De esta manera el potencial agregado es uniforme sobre cualquier esfera concéntrica al origen, y se cancela exactamente la carga inducida del problema anterior, dejando al conductor sin carga neta mientras esté desconectado (aislado).

## Problema 22

Se trata de un anillo de radio  $b$  y carga lineal uniforme  $\lambda$  concéntrico a una esfera conductora a tierra de radio  $a < b$ .



(a) Una primera forma de resolver este problema es usando la función de Green tipo Dirichlet del exterior de la esfera,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_S d^2r' \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} . \quad (57)$$

En este caso, como el contorno y la distribución de carga pueden describirse cómodamente en coordenadas esféricas, vamos a usar la función de Green en esféricas

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \left[ \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \Big|_{r,r'} - \frac{a^{2l+1}}{(r'r)^{l+1}} \right] . \quad (58)$$

En donde los radios  $r_{<}$ , y  $r_{>}$ , son  $r$ , o  $r'$ , según corresponda. El potencial se anula sobre la superficie de la esfera, por lo que el segundo término de arriba es cero. La densidad de carga  $\rho(\mathbf{r}')$  del anillo de radio  $r' = b$ ,

la vamos a ubicar en el plano  $\theta' = \pi/2$ , de modo que la integral es unidimensional (sólo en  $\varphi'$ )

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{r'=b, \theta'=\pi/2} b d\varphi' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \lambda \quad (59)$$

$$= b \lambda \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \left[ \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \Big|_{r,b} - \frac{a^{2l+1}}{(br)^{l+1}} \right] \int_0^{2\pi} d\varphi' Y_{lm}^*(\pi/2, \varphi'). \quad (60)$$

Observen que hemos evaluado  $r' = b$  en toda la función. Calculando por separado la integral de los armónicos esféricos, tenemos

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' Y_{lm}^*(\pi/2, \varphi') = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l(\cos \pi/2) \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{-im\varphi'} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(0) 2\pi \delta_{m,0}, \quad (61)$$

pues los  $m$  son enteros, y sólo para  $m = 0$  la integral es no nula. Reemplazando este resultado en (60) obtenemos

$$\Phi(\mathbf{r}) = Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(0) \left[ \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \Big|_{r,b} - \frac{a^{2l+1}}{(br)^{l+1}} \right] \quad (62)$$

$$= Q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) P_l(0) \left[ \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \Big|_{r,b} - \frac{a^{2l+1}}{(br)^{l+1}} \right] \quad (63)$$

$$= Q \sum_{\substack{l=0 \\ \text{pares}}}^{\infty} P_l(\cos \theta) P_l(0) \left[ \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \Big|_{r,b} - \frac{a^{2l+1}}{(br)^{l+1}} \right], \quad (64)$$

en donde definimos  $Q \equiv 2\pi b \lambda$  como la carga total del anillo, y en la última igualdad observamos que sólo aparecen los términos con  $l$  par ya que  $P_{2n+1}(0) = 0$ . La solución no depende de  $\varphi$  por la simetría azimutal de la configuración y, además, recuperamos la simetría de reflexión en el plano ecuatorial que contiene al anillo a partir de los polinomios de Legendre con  $l$  par.

Pasamos al ítem (c) y dejamos el (b) para después. Para resolver este problema usando separación de variables en coordenadas esféricas debemos tomar una superficie esférica que contenga al anillo. La única opción que satisface estas condiciones es tomar la superficie  $r = b$ . Además, si tomamos el sistema de referencia de manera tal que el anillo se encuentre en  $\theta = \pi/2$ , el problema es simétrico ante rotaciones en  $\varphi$  de manera tal que podemos expandir a la solución solo con polinomios de Legendre

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_l (A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta) & a \leq r \leq b \\ \sum_l (C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta) & b \leq r. \end{cases} \quad (65)$$

Para determinar las incógnitas  $A_l, B_l, C_l, D_l$  debemos imponer las condiciones de contorno. La primera de ellas es que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{r}) = 0 \implies C_l = 0, \quad \forall l. \quad (66)$$

Además el potencial se tiene que anular sobre la esfera

$$\Phi(r = a) = 0, \quad \forall \theta, \varphi \quad (67)$$

$$\implies A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}} = 0 \quad (68)$$

$$\implies B_l = -A_l a^{2l+1}. \quad (69)$$

Así, el potencial se puede escribir como

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \sum_l A_l \left( r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) & a \leq r \leq b \\ \sum_l \frac{D_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) & b \leq r. \end{cases} \quad (70)$$

Por otro lado podemos asegurar la continuidad en  $r = b$  y condensar esto último reescribiendo al potencial como

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_l A_l \left( r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \frac{1}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (71)$$

donde  $r_{<} = \min\{r, b\}$  y  $r_{>} = \max\{r, b\}$ . Por último tenemos que determinar los coeficientes  $A_l$ , para lo cual usamos la condición del salto del potencial

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=b^-} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=b^+} = 4\pi\sigma. \quad (72)$$

Como la carga se concentra en  $\theta = \pi/2$  la densidad de carga sobre la superficie  $r = b$  vendrá dada por

$$\sigma(\theta, \varphi) = K\delta(\cos \theta - \cos \pi/2) = K\delta(\cos \theta), \quad (73)$$

donde  $K$  es una función que podemos determinar pidiendo que la carga total sobre la superficie sea la de un anillo de densidad  $\lambda$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) d\varphi b^2 \sigma(\theta, \varphi) \quad (74)$$

$$2\pi b\lambda = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) d\varphi b^2 K\delta(\cos \theta - \cos \pi/2) \quad (75)$$

$$2\pi b\lambda = 2\pi b^2 K \implies K = \frac{\lambda}{b}. \quad (76)$$

Reemplazando en la condición de salto, tenemos

$$\sum_l A_l \left[ \left( lb^{l-1} - (-l-1) \frac{a^{2l+1}}{b^{l+2}} \right) \frac{1}{b^{l+1}} - \left( b^l - \frac{a^{2l+1}}{b^{l+1}} \right) (-l-1) \frac{1}{b^{l+2}} \right] P_l(\cos \theta) = 4\pi \frac{\lambda}{b} \delta(\cos \theta) \quad (77)$$

$$\sum_l A_l \left[ (lb^{l-1}) \frac{1}{b^{l+1}} - (b^l) (-l-1) \frac{1}{b^{l+2}} \right] P_l(\cos \theta) = 4\pi \frac{\lambda}{b} \delta(\cos \theta) \quad (78)$$

$$\sum_l A_l \frac{2l+1}{b^2} P_l(\cos \theta) = 4\pi \frac{\lambda}{b} \delta(\cos \theta). \quad (79)$$

Ahora podemos despejar los  $A_l$  usando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre

$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}. \quad (80)$$

Así, tenemos

$$\int_{-1}^1 d \cos \theta P_{l'}(\cos \theta) \sum_l A_l \frac{2l+1}{b^2} P_l(\cos \theta) = \int_{-1}^1 d \cos \theta P_{l'}(\cos \theta) 4\pi \frac{\lambda}{b} \delta(\cos \theta). \quad (81)$$

$$A_{l'} \frac{2l'+1}{b^2} \frac{2}{2l'+1} = 4\pi \frac{\lambda}{b} P_{l'}(0) \quad (82)$$

$$\implies A_l = 2\pi \lambda b P_l(0) = Q P_l(0). \quad (83)$$

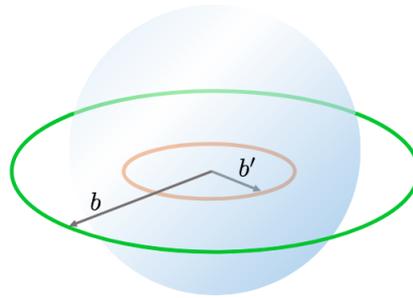
El potencial resulta

$$\Phi(\mathbf{r}) = Q \sum_{l=0}^{\text{pares}} P_l(0) \left( r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \frac{1}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (84)$$

que coincide con el obtenido por el método de la función de Green. El aprendizaje es que el método de Green puede resultar mucho más directo incluso en problemas no tan complicados como este. Si el problema es muy sencillo, quizás, Green no valga la pena. La integral de Green es útil y práctica cuando contamos con la función de Green necesaria para la región de interés, pero en algunas situaciones es incluso más práctico ponerse a calcular la función de Green y luego utilizarla, que resolver el problema directamente por otro método. Cuando la distribución de carga es volumétrica o rompe con los paralelepípedos de las coordenadas que necesitamos para la división en regiones, el método de separación de variables necesariamente debe ser reemplazado, y podemos poner en juego al de la función de Green.

(b) Para resolver el problema mediante el método de imágenes podemos pensar al anillo de radio  $b$  a partir de cada elemento de carga  $\delta q = \lambda \delta \ell$  que lo compone, y ubicar las imágenes  $\delta q'$  correspondientes dentro de la esfera usando lo que ya sabemos hacer para cargas puntuales (de forma tal de mantener la esfera a potencial nulo). Para construir la imagen total hay que superponer las imágenes  $\delta q'$  de cada elemento. Como la imagen de cada punto del anillo se halla también sobre el plano  $\theta = \pi/2$ , lo que vamos a tener como imagen total es un anillo pero de radio  $b' = a^2/b$ . Como los elementos de carga imagen son de magnitud  $\delta q' = -\delta q a/b$ , la carga total del anillo imagen es  $Q' = -Q a/b$ . Hagamos un chequeo pensándolo de otra manera, vean:

$$Q' = \lambda' 2\pi b' = \frac{\delta q'}{\delta \ell'} 2\pi b' = \frac{-\delta q a/b}{b' \delta \varphi} 2\pi b' = -\frac{\delta q}{b \delta \varphi} 2\pi a = -\frac{\delta q}{\delta \ell} 2\pi a = -\lambda 2\pi b a/b = -Q a/b \quad (85)$$



Dicho esto, la solución al problema exterior al conductor consistirá de la superposición de ambos anillos, el prescrito con carga  $Q = \lambda 2\pi b$ , y su imagen con carga  $Q' = \lambda' 2\pi b'$ . Esto que acabamos de hacer es el método de imágenes: ubicamos una distribución de cargas imágenes por fuera de la región donde queremos

resolver el problema de forma tal de no modificar las cargas prescritas dentro de nuestra región de interés y, simultáneamente, preservamos las condiciones de contorno deseadas (el potencial es nulo sobre la esfera  $r = a$ , y en el infinito). Ahora hay que elegir cómo resolver explícitamente el problema de los dos anillos. El ítem (b) sugiere que lo hagamos mediante prolongación analítica. Esta estrategia que ya usaron en la teórica (y seguramente en la materia de matemática correlativa), consiste en resolver en un segmento particular y extender la solución hallada para obtener la solución en todo el espacio. Mas precisamente, nos pide calcular el potencial sobre el eje  $z$  y luego extender la solución a puntos fuera del eje. Veamos como hacer esto último para un anillo. Recordamos la solución para el potencial generado por un anillo de radio  $b$  con  $\lambda$  sobre el eje  $z$  ( $\theta = 0$ ) que obtuvimos por integración directa en la clase práctica03

$$\Phi_{\lambda}^{eje} = \frac{Q}{\sqrt{b^2 + z^2}} \quad (86)$$

La prolongación analítica consiste en usar un desarrollo de funciones independientes para escribir este resultado en el eje y extrapolarlo fuera del eje. Por otro lado, el potencial del anillo tiene simetría azimutal, y si lo pensamos como una distribución superficial sobre una esfera de radio  $b$ , nuestra experiencia con separación de variables nos dice que se puede escribir para todo el espacio de la siguiente manera

$$\Phi_{\lambda}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{r^l}{r^{l+1}} \Big|_{r,b} P_l(\cos \theta), \quad (87)$$

donde hemos usado toda nuestra sabiduría acerca de separación de variables en esféricas (chequeen si no les parece evidente). La idea del procedimiento de prolongación sería expandir la función (86) en potencias, hacer las identificaciones pertinentes y obtener los coeficientes  $A_l$  de arriba. En cambio, lo que vamos a hacer para que el método resulte realmente práctico es notar, o recordar, la siguiente identidad

$$\frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \theta}} = Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (88)$$

obtenida a partir del potencial generado por una carga puntual  $Q$  en  $\mathbf{r}' = b\hat{z}$ . Si evaluamos la fórmula de arriba en  $\theta = \pi/2$ ,  $\cos \pi/2 = 0$ , vemos que

$$\Phi_{\lambda}^{eje} = Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r^{l+1}} \Big|_{z,b} P_l(0), \quad (89)$$

y ya tenemos el desarrollo en potencias de  $r|_{eje} = z$  que necesitamos para aplicar la prolongación analítica. Esto es, como las expresiones (89) y (87) deben coincidir en todo punto sobre el eje  $z$ , al evaluar (87) en  $\theta = 0$  tenemos que

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{r^l}{r^{l+1}} \Big|_{z,b} P_l(1) = Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r^{l+1}} \Big|_{z,b} P_l(0) \implies A_l = Q P_l(0), \quad (90)$$

donde usamos que  $P_l(1) = 1$ . El potencial para todo el espacio producido por el anillo de radio  $b$  es

$$\Phi_{\lambda}(r, \theta) = Q \sum_{l=0}^{\text{pares}} P_l(0) \frac{r^l}{r^{l+1}} \Big|_{r,b} P_l(\cos \theta). \quad (91)$$

Análogamente, para el anillo imagen

$$\Phi_{\lambda'}(r, \theta) = Q' \sum_{l=0}^{\text{pares}} P_l(0) \frac{r^l}{r^{l+1}} \Big|_{r,b'} P_l(\cos \theta), \quad (92)$$

y como nos interesa  $r > a > b'$ , tenemos

$$\Phi_{\lambda'}(r > a, \theta) = Q' \sum_{l=0}^{\text{pares}} P_l(0) \frac{b^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (93)$$

$$= -Q \sum_{l=0}^{\text{pares}} P_l(0) \frac{a^{2l+1}}{(br)^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (94)$$

donde reemplazamos el valor de  $Q'$  y  $b'$  obtenido mediante imágenes. Superponiendo el potencial del anillo y el de su imagen obtenemos el potencial completo del anillo cargado con  $\lambda$  frente a la esfera a tierra

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_{\lambda}(r > a, \theta) + \Phi_{\lambda'}(r > a, \theta) = Q \sum_{l=0}^{\text{pares}} P_l(0) \left[ \underbrace{\frac{r^l}{r^{l+1}} \Big|_{r,b}}_{\text{real}} - \underbrace{\frac{a^{2l+1}}{(br)^{l+1}}}_{\text{imagen}} \right] P_l(\cos \theta). \quad (95)$$

Coincide con la expresión hallada anteriormente mediante la integral de Green y separación de variables. Desde aquí, habiendo visto explícitamente el potencial  $\Phi_{\lambda}$  y  $\Phi_{\lambda'}$  de la carga prescrita y de su imagen, es evidente identificar los términos de cada contribución.

(d) Para calcular la densidad de carga inducida sobre el conductor podemos usar el salto en el potencial

$$\sigma_{\text{ind}}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r}(a^+) = -\frac{Q}{4\pi} \sum_{l=0}^{\text{pares}} \frac{2l+1}{a^2} P_l(\cos \theta) P_l(0) \left(\frac{a}{b}\right)^{l+1}, \quad (96)$$

que al integrarla sobre la superficie de la esfera nos da la carga total inducida

$$Q_{\text{ind}} = \int_0^{2\pi} a^2 d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \sigma_{\text{ind}}(\theta, \varphi) \quad (97)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi} \sum_l \frac{2l+1}{a^2} P_l(0) \left(\frac{a}{b}\right)^{l+1} \int_0^{2\pi} a^2 d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \quad (98)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi} \sum_l (2l+1) P_l(0) \left(\frac{a}{b}\right)^{l+1} 2\pi 2\delta_{l,0} \quad (99)$$

$$= -\frac{a}{b} Q \equiv Q'. \quad (100)$$

Vemos que la carga total inducida en el conductor es efectivamente la carga de la distribución imagen que habíamos construido en el ítem (b). El teorema de Gauss no nos deja otra opción.

(e) Nos piden obtener la solución al problema que tiene el conductor esférico descargado y aislado. Para lograr esto, en la práctica, hay que agregar una cantidad de carga  $-Q'$  sobre el conductor y desconectarlo (aislarlo). La carga agregada se distribuye sobre la superficie del conductor y, además, debido a la simetría esférica, lo hará de manera uniforme de forma tal de preservarla como una superficie equipotencial. Siguiendo este razonamiento, la solución al nuevo problema la podemos construir a partir de superponer a la solución anterior una carga puntual de valor  $Q = -Q'$  en el centro de la esfera. Logramos, entonces, que la superficie de la esfera  $r = a$  siga siendo equipotencial y que la carga total del conductor sea nula.