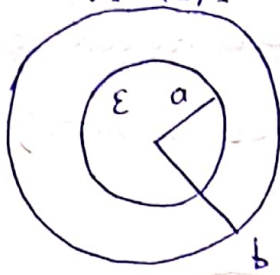


P3)

$$\sigma = \sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$$

(caso $a < b$)



[Esfera dieléctrica con ϵ (escalar, uniforme) : MLIH]

Identificar y ubicar las cargas libres y de polarización :

Libres : σ en $r = b$

Polarización :

χ es uniforme en $r < a$

En volumen : $(r < a)$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot (\chi \vec{E}) \stackrel{\uparrow}{=} -\chi \nabla \cdot \vec{E}$$

MLHI : $\vec{P} = \chi \vec{E}, (\chi = \frac{\epsilon - 1}{4\pi})$

$$= -\frac{\chi}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} = 0 : r < a$$

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, ϵ es uniforme en $r < a$

En superficie : $r = a$

El cambio de medio en una interfase produce un cambio en \vec{P}

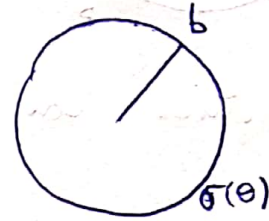
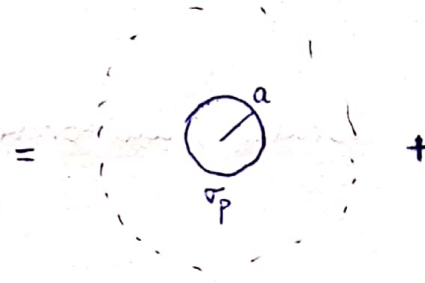
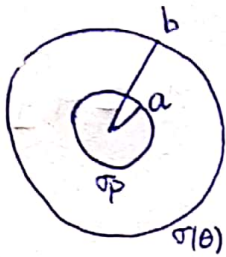
\Rightarrow aparece carga de polarización inducida.

$$\sigma_p = - \left[\underbrace{(\vec{P}_{ext} - \vec{P}_{int})}_{= 0} \cdot \underbrace{\hat{m}_{i \rightarrow e}}_{= \hat{r}} \right] \Big|_{\text{Sup. } r=a} = (\vec{P}_{int} \cdot \hat{r}) \Big|_a$$

$(\chi_{ext} = 0)$

$\sigma = \sigma_0 \cdot \cos \theta$: cargas libres en $r=b$ (dato)

$\vec{\sigma}_p = \vec{P}(a^-) \cdot \hat{r}$: cargas de polarización en $r=a$
(no la conocemos a priori)



$$\phi = \phi_E + \phi_\sigma$$

Resolución de ϕ_σ :

$$\phi_\sigma = \sum_{l=0}^{+\infty} B_l \cdot P_l(\cos \theta) \cdot \left(\frac{r^l}{r_0^{l+1}} \right)_{r,b} \quad : \quad \text{Potencia de una cáscara en } r=b$$

Como σ es dato puedo resolver esta parte independientemente :

$$\left(-\partial_r \phi_\sigma \right)_{b^+} + \left(\partial_r \phi_\sigma \right)_{b^-} = 4\pi \sigma$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} B_l \cdot P_l(\cos \theta) \left[\frac{(l+1)}{b^2} + \frac{l}{b^2} \right] = 4\pi \underbrace{\sigma_0 \cdot \cos \theta}_{\sigma \text{ dato}}$$

$P_1(\cos \theta)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_{l \neq 1} = 0 \\ B_1 = \frac{4\pi \sigma_0 \cdot b^2}{(2 \cdot 1 + 1)} = \frac{4\pi b^2 \sigma_0}{3} \end{array} \right.$$

[ortogonalidad de los $P_l(\cos \theta)$]

$$\phi_\epsilon = \sum A_l P_l(\cos\theta) \left(\frac{r^\epsilon}{r_s^{\epsilon+1}} \right)_{r=a} : \text{Potencial de una cáscara en } r=a \text{ con } \sigma_p.$$

- σ_p es desconocida \Rightarrow no podemos resolver ϕ_ϵ independientemente
- Hay que regresar al problema original con la construcción que tenemos hecha : $\phi = \phi_\sigma + \phi_\epsilon$
- La única incógnita son los A_l . Para despejarlos hay que usar la información en $r=a$, donde desconocemos la $\sigma_{total} = \sigma_p$, pero sabemos que $\sigma_{libre} = 0 \Rightarrow$ usamos el salto de \vec{D} :

$$(\vec{D}_{ext} - \vec{D}_{int})_a \cdot \hat{r} = 4\pi \sigma_p|_a = 0$$

$$(1 \cdot \vec{E}_{ext} - \epsilon \cdot \vec{E}_{int})_a \cdot \hat{r} = 0$$

$$-\partial_r \phi|_{a^+} + \epsilon \cdot \partial_r \phi|_{a^-} = 0$$

Obs: ϕ es el potencial original (el total) del problema
 $(\phi = \phi_\sigma + \phi_\epsilon)$

$$\phi_E = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos\theta) A_l \begin{cases} r^l/a^{l+1}, & r \leq a \\ a^l/r^{l+1}, & r > a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi_r = \frac{B_1}{\frac{4\pi b^2 \sigma_0}{3}} \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{r_c}{r^2}\right)_{r,b} = \begin{cases} \frac{4\pi b^2 \sigma_0}{3} \frac{\cos\theta r}{b^2}, & r \leq b \\ \frac{4\pi b^2 \sigma_0}{3} \frac{\cos\theta b}{r^2}, & r \geq b \end{cases}$$

$$-\left[\partial_r (\phi_r + \phi_E)\right]_{r=a} + \epsilon \left[\partial_r (\phi_r + \phi_E)\right]_{r=a} = 0$$

$$-\left[B_1 \frac{c(\theta)}{b^2} + \sum A_l P_l(\cos\theta) [-(l+1)] \frac{a^l}{a^{l+2}}\right] + \epsilon \left[B_1 \frac{c\theta}{b^2} + \sum A_l P_l(\cos\theta) l \frac{a^{l+1}}{a^{l+1}}\right] = 0$$

$$\sum A_l P_l(\cos\theta) \frac{l(\epsilon+1)+1}{a^2} + B_1 \cdot \overbrace{c\theta}^{=P_1(\cos\theta)} \frac{(-1+\epsilon)}{b^2} = 0$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos\theta) \cdot A_l \cdot \frac{l(\epsilon+1)+1}{a^2} = -B_1 \frac{(-1+\epsilon)}{b^2} \cdot P_1(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{l \neq 1} = 0 \\ A_1 = -\frac{(-1+\epsilon)}{[l(\epsilon+1)+1]_{l=1}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 B_1 = -\frac{(\epsilon-1)}{\epsilon+2} \cdot a^2 \cdot \frac{4\pi \sigma_0}{3} \end{cases}$$

$$\phi = \frac{4\pi \sigma_0}{3} \cdot \left[\left(\frac{r_c}{r^2}\right)_{r,b} \cdot b^2 - \frac{(\epsilon-1)}{\epsilon+2} \cdot \left(\frac{r_c}{r^2}\right)_{r,a} \cdot a^2 \right] \cdot \cos(\theta)$$

Obs: $\epsilon \rightarrow 1$ recupera solución sin dieléctrico.

Cáscara con $\sigma_L = \sigma_0 \cos \theta$ en $r = b$, a parte:

$$\phi_r = \frac{4\pi\sigma_0}{3} \cdot \begin{cases} r \cos \theta = z & r \leq b \\ b^3 \frac{\cos \theta}{r^2} = b^3 \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^3} & r \geq b \end{cases}$$

($\cos \theta = \hat{z} \cdot \hat{r}$)

$$E_b \equiv \frac{4\pi\sigma_0}{3} ; \quad \vec{P} \equiv \frac{4\pi\sigma_0}{3} b^3 \hat{z} \equiv P_b \hat{z} ; \quad E_b \equiv \frac{P_b}{b^3}$$

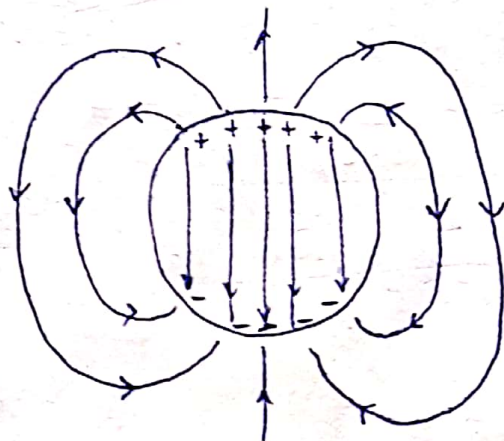
$$\vec{E}_\sigma = -\vec{\nabla} \phi_\sigma = \begin{cases} -E_b \hat{z} \equiv -\vec{P}/b^3 & r \leq b \\ \frac{3(\vec{P} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{P}}{r^3} & r \geq b \end{cases}$$

auxiliar:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) &= \hat{r} \cdot \partial_r \left(\frac{1}{r^2} \cos \theta \right) + \frac{\hat{\theta}}{r} \partial_\theta \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \\ &= -\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{r} - \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\theta} = \frac{\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} - 3 \cos \theta \hat{r}}{r^3} \\ &= [-3(\hat{z} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} + \hat{z}] / r^3 \end{aligned}$$

(asumiendo $\sigma_0 > 0$)

Campo \vec{E}_σ :



uniforme adentro
dipolar afuera
líneas de campo salen de \oplus y entran en \ominus
↓
cargas positivas ↓
negativas

Análisis del Campo \vec{E} de la configuración total:

$$\phi_\epsilon = \begin{cases} E_a \cdot z & , r \leq a \\ \frac{\vec{P}_a \cdot \vec{r}}{r^3} & , r \geq a \end{cases} ; \quad E_a = - \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \right) \vec{E}_b$$

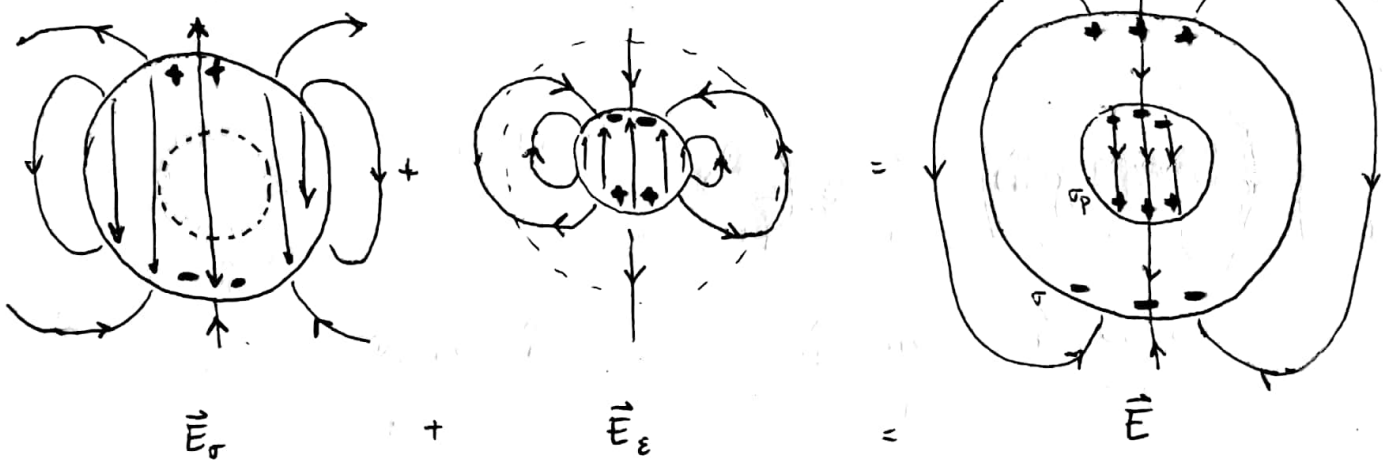
$$1 > 0 \rightarrow \frac{4\pi\sigma_0}{2}$$

$$\vec{P}_a = P_a \hat{z} ; \quad P_a = a^3 E_a = - \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \right) P_b \left(\frac{a^3}{b^3} \right) = - \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \right) E_b b^3$$

$$\phi = \begin{cases} (E_b + E_a) \cdot z & , r \leq a \\ z E_b + \frac{\vec{P}_a \cdot \vec{r}}{r^3} & , a \leq r \leq b \\ \left(\frac{\vec{P}_b + \vec{P}_a}{r^3} \right) \cdot \vec{r} & , b \leq r \end{cases}$$

$(P_b + P_a) \hat{z} ; P_b + P_a > 0$

$$\vec{E} = -\nabla\phi :$$



$$\sigma_p = \vec{P}_{int} \cdot \hat{r} \Big|_a = \chi \vec{E}_{int} \cdot \hat{r} \Big|_a = \chi \cdot (-\partial_r \phi_{int}) \Big|_a ; \quad \chi = \frac{\epsilon-1}{4\pi}$$

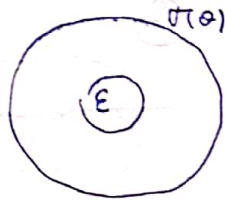
$$= - \left(\frac{\epsilon-1}{4\pi} \right) (E_a + E_b) \cdot \cos\theta = - \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \right) \sigma_0 \cdot \cos\theta \quad \left(\text{se puede leer de } \phi_\epsilon \text{ pues sus fuentes son exclusivamente } \sigma_p \text{ en este caso} \right)$$

$$Q_p = \int \sigma_p \cdot a^2 d\Omega = 0 \quad \checkmark : \text{carga total del dieléctrico}$$

$$\vec{P}_p = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sigma_p \cdot \vec{r} \Big|_a \overbrace{d(\cos\theta) d\varphi}^{d\Omega} a^2 = \vec{P}_a \quad \checkmark : \text{momento dipolar del dieléctrico}$$

b) Misma config. pero sumergida en un campo uniforme.

$$\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$$



$\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$: Este campo llega hasta infinito

\vec{E}_0 representa una condición de contorno tipo Neumann en infinito :

$$\underbrace{(-\vec{\nabla}\phi) \cdot \hat{n}}_{-\partial_r \phi|_\infty} \Big|_\infty = \vec{E} \cdot \hat{n} \Big|_\infty = E_0 \cdot \hat{z} \cdot \hat{r} = E_0 \cdot \cos\theta$$

\downarrow
 $\hat{n} = \hat{r}$

$$\Rightarrow \phi|_\infty = -E_0 \cdot \cos\theta \cdot r \Big|_\infty = -E_0 \cdot z \Big|_\infty$$

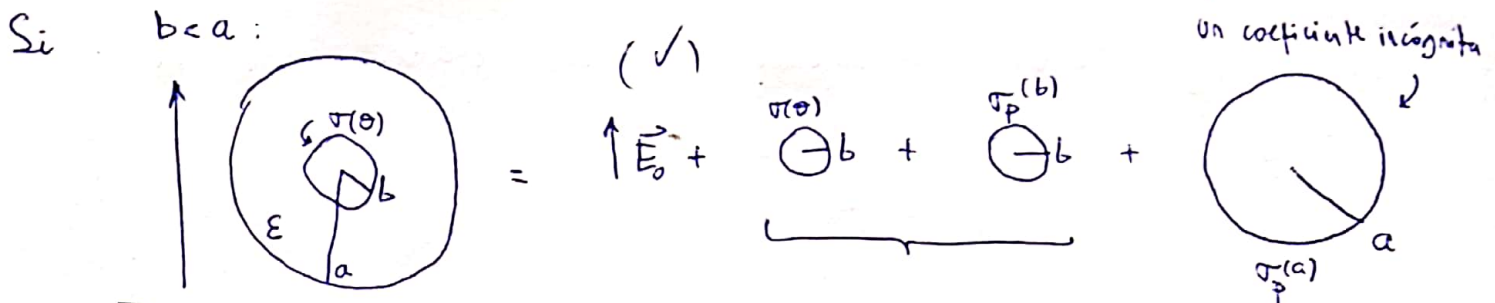
[Si resuelvo por separación de variables en regiones, hay que conservar este término en el potencial externo (en vez de tirar todos los que divergen en '∞')]

Por superposición:

$$\begin{aligned} \text{Diagram: } & \text{Sphere } \epsilon \text{ with } \vec{E}_0 \uparrow = \text{Sphere } \epsilon + \text{Sphere } \sigma(\theta) + \vec{E}_0 \uparrow \\ \phi & = \phi_\epsilon + \phi_\sigma + \phi_c = -E_0 \cdot z \\ & \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad (\checkmark) \quad (\checkmark) \\ & \quad \quad \quad \text{un coeficiente incógnita} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\vec{\nabla}(\sigma) - \vec{\nabla}(\alpha)] \cdot \hat{r} = 4\pi \sigma_L|_a = 0$$

y despejamos.



$$\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$$

En $r=b$ la carga libre queda apantallada

$$\sigma_{total}^{(b)} = \sigma(\theta) + \sigma_p^{(b)} = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon} \quad (\checkmark)$$

[pues ahora en el volumen $r < a$ tenemos:

$$P_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\chi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\chi}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon}\right) \cdot P_L$$

$$= -\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon}\right) \cdot \underbrace{\sigma(\theta)}_{\sigma_L^{(b)} = \sigma_0 \cos\theta} \cdot \delta(r-b) \Rightarrow \sigma_{tot}^{(b)} = \sigma_L^{(b)} + \sigma_p^{(b)} = \frac{\sigma_L^{(b)}}{\epsilon} \equiv \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon} \quad \left[\begin{array}{l} \text{dato} \\ \sigma(\theta) \end{array} \right]$$

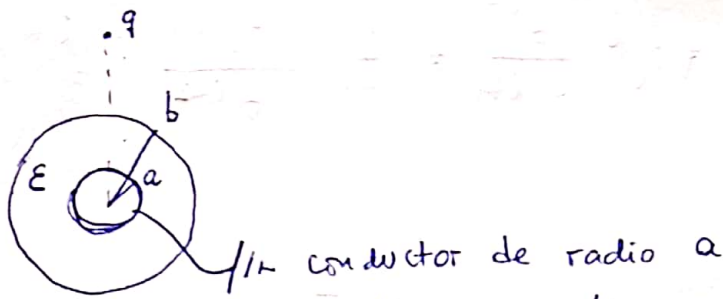
La resolución es análoga al caso anterior pues la distrib. de carga en $r=b$ es conocida. Ahora en lugar

de $\sigma(\theta)$ usamos $\frac{\sigma(\theta)}{\epsilon}$ [apantallado], es decir $\phi_\sigma \rightarrow \frac{\phi_\sigma}{\epsilon} = \phi_{\sigma_{tot}^{(b)}}$ del problema anterior

finalmente:

$$\left[\vec{D}(a^+) - \vec{D}(a^-) \right] \cdot \hat{r} = 4\pi \sigma_L|_a = 0 \dots$$

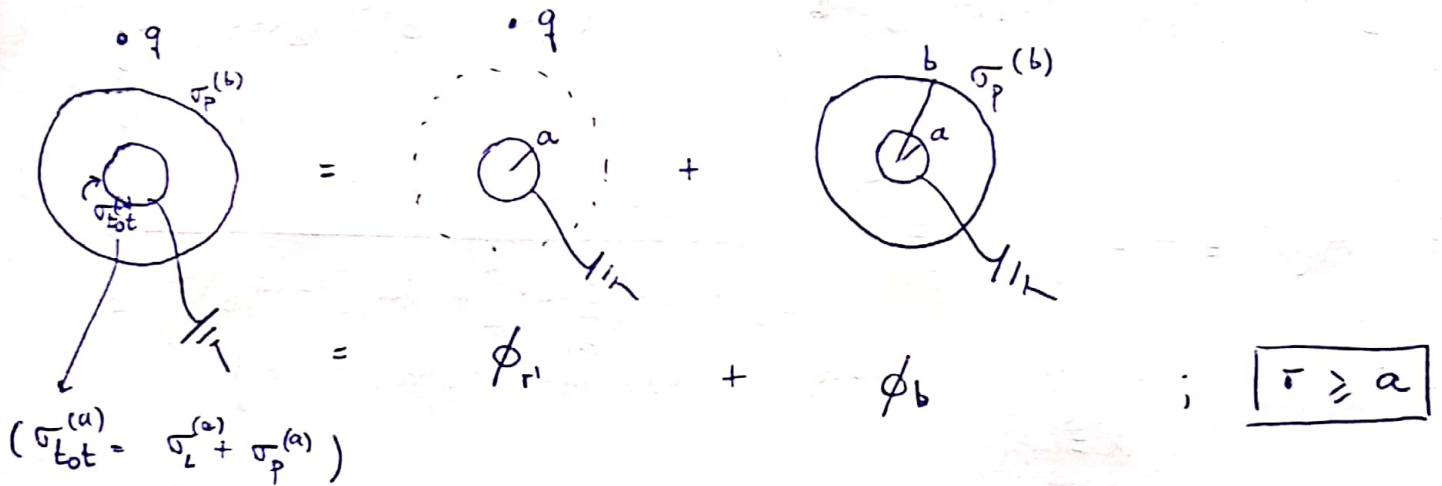
P1)



conductor de radio a
(a tierra $\Rightarrow \phi(r=a) = 0$).

a)

- Cargas libres en $r=a$ y la carga puntual q en r'
- Cargas de polarización en $r=a$ y $r=b$



$$\sigma_{tot}^{(a)} = \sigma_L^{(a)} + \sigma_P^{(a)}$$

todas las que trae el conductor a tierra

$$\phi_{r'} = q \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos\theta) \left[\frac{r_c^l}{r_j^{l+1}} - \left(\frac{a}{r'}\right) \cdot \frac{(a^2/r')^l}{r^{l+1}} \right]_{r,r'} \quad (\phi_{r'}(a) = 0)$$

carga q imagen de q frente al conductor

$$\phi_b = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos\theta) A_l \left[\frac{r_c^l}{r_j^{l+1}} - \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \frac{(a^2/b)^l}{r^{l+1}} \right]_{r,b} \quad (\phi_b(a) = 0)$$

imagen de la cáscara frente al conductor

cáscara de radio b , con σ arbitraria azimutal arbitraria

$$\Rightarrow [\vec{D}(b^+) - \vec{D}(b^-)] \cdot \hat{r} = 0$$

$$(-\partial_r \phi)_{b^+} + \epsilon (\partial_r \phi)_{b^-} = 0$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left\{ - \left[q \cdot \left(\frac{l \cdot b^{l-1}}{r^{l+1}} + \frac{a}{r} \frac{(a^2/r')^l (l+1)}{b^{l+2}} \right) + \right. \right.$$

$$\left. A_l \left(-\frac{(l+1)}{b^2} + \frac{a}{b} \frac{(a^2/b)^l (l+1)}{b^{l+2}} \right) \right] +$$

$$\left. \varepsilon \left[q \left(\frac{l \cdot b^{l-1}}{r^{l+1}} + \frac{a^{2l+1} (l+1)}{r^{l+1} b^{l+2}} \right) + A_l \left(\frac{l}{b^2} + \frac{a^{2l+1} (l+1)}{b^{l+1} b^{l+2}} \right) \right] \right\} = 0$$

$$\Rightarrow A_l = -q (\varepsilon - 1) \left(\frac{b}{r} \right)^{l+1} \frac{l + (l+1) (a/b)^{2l+1}}{\varepsilon [l + (l+1) (a/b)^{2l+1}] + (l+1) [1 - (a/b)^{2l+1}]}$$

($\varepsilon \rightarrow 1$: sin dieléctrico, $\varepsilon \rightarrow \infty$: conductor hasta $r=b$)

$$\chi \vec{E}(a^+) = 0$$

$$b) \sigma_p^{(a)} = - [\vec{P}(a^+) - \vec{P}(a^-)] \cdot \hat{r} = -\chi (-\partial_r \phi|_{a^+})$$

$$\sigma_p^{(b)} = \vec{P}(b^-) \cdot \hat{r} = \chi (-\partial_r \phi|_{b^-})$$

$$\sigma_L^{(a)} = \varepsilon \cdot \sigma_{tot} = \varepsilon (\sigma_L^{(a)} + \sigma_p^{(a)}) \Rightarrow \sigma_L^{(a)} = \frac{\varepsilon \sigma_p^{(a)}}{1 - \varepsilon}$$

$$= \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \chi \cdot \partial_r \phi|_{a^+} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \partial_r \phi|_{a^+} = \varepsilon \cdot \sigma_{tot}^{(a)} \checkmark$$

$$Q_{tot}^{(a)} = \int \sigma_{tot}^{(a)} a^2 d\Omega \quad ; \quad Q_{tot}^{(b)} = \int \sigma_p^{(b)} b^2 d\Omega \quad \left(\chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \right)$$

$$Q_{polarización} = Q_{pol}^{(a)} + Q_{pol}^{(b)} = 0$$