

# FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2020

## GUÍA 3: MEDIOS MATERIALES Y MULTIPOLOS

### Dieléctricos, electretes y conductores.

1. Una esfera conductora de radio  $a$  está a potencial cero. Entre  $r = a$  y  $r = b$  hay un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , y ubicada a una distancia  $r'$  del origen hay una carga  $q$ . Considerar separadamente los dos casos  $a < b < r'$  y  $a < r' < b$ .

- (a) Identificar dónde se encuentran las cargas y hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio.
- (b) Calcular las densidades de carga de polarización en volumen y superficie, y las densidades de carga libre en todo el espacio.
- (c) Analizar los casos  $\epsilon = 1$  y  $\epsilon \rightarrow \infty$ . ¿Cuál es la interpretación física de los resultados?

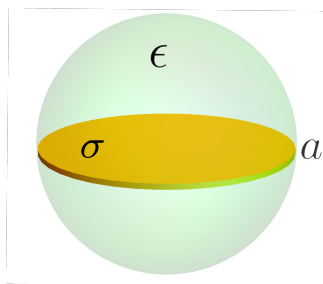
*Ayuda:* usar la forma genérica del potencial de una cáscara cargada frente a una esfera (que puede deducirse en una línea), y bastará plantear una sola ecuación con una sola incógnita. En otro caso tendrá que plantear 5 ecuaciones con 5 incógnitas.

2. (a) En un medio de constante dieléctrica  $\epsilon$  se sumerge una esfera conductora de radio  $a$  cargada con una carga total  $Q$ . Hallar los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en todo punto del espacio y las distribuciones de carga libre en el conductor y de polarización en el dieléctrico.
- (b) Calcular  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  si en lugar de fijar  $Q$ , la esfera conductora se conecta ahora a un potencial  $V$ .
- (c) Si bien existe una analogía formal entre ambos casos, hay una diferencia esencial entre ellos: la dependencia de los campos con  $\epsilon$ . Explicar las causas de esta diferencia.

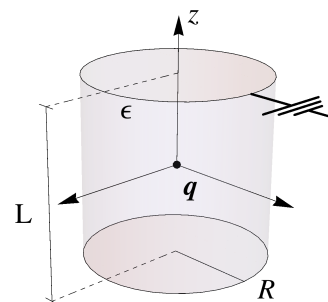
3. Una esfera homogénea de radio  $a$  tiene permitividad  $\epsilon$  y es concéntrica con una cáscara esférica con densidad de carga  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  y radio  $b$ . Analizar por separado los casos  $a < b$  y  $b < a$ :

- (a) Calcular el potencial en todo punto del espacio. Hallar la distribución de cargas de polarización en volumen y en superficie y el momento dipolar del dieléctrico. ¿Coinciden los límites  $b \rightarrow a^+$  y  $b \rightarrow a^-$ ?
- (b) Estudiar el problema con el conjunto sumergido en un campo uniforme en el infinito,  $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$ .

4. Hallar el potencial electrostático en todo el espacio producido por la configuración de la figura: un disco de radio  $a$  y densidad superficial uniforme  $\sigma$  ubicado dentro de una esfera dieléctrica del mismo radio y permitividad  $\epsilon$ .



Problema 4.



Problema 5.

5. Una carga puntual  $q$  se ubica en el centro de un cilindro conductor cuyo interior está relleno con un material dieléctrico de constante uniforme  $\epsilon$ . El cilindro tiene sección circular de radio  $R$  y altura  $L$ , se encuentra centrado en el origen y conectado a tierra (sus 2 tapas y su cara lateral).
- Encontrar el potencial electrostático  $\Phi$  en todo el espacio.
  - Calcular todas las distribuciones de carga libres y de polarización e indicar dónde se ubican. ¿Cuánta carga se induce en el conductor?
  - El dispositivo se enfría de forma tal que el dieléctrico se vuelve un material de polarización permanente, un *electrete*. Posteriormente se remueve el caparazón conductor sin alterar al electrete, quedando la carga  $q$  en el centro del cilindro macizo de polarización permanente: ¿Cómo es el campo eléctrico en la región exterior del conjunto electrete y carga  $q$ ?

### Medios magnéticos.

6. *Imán esférico.* Una esfera de radio  $a$  está uniformemente magnetizada con densidad  $\mathbf{M} = M\hat{z}$ .
- Calcular las fuentes de  $\mathbf{H}$  e identificar el problema eléctrico equivalente. Calcular los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  usando la integral de Poisson para el potencial escalar magnético  $\Phi_{\mathbf{H}}$ , continuo en todo el espacio y tal que  $-\nabla\Phi_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ . Comparar el potencial en el exterior de la esfera con el que produciría un dipolo magnético puntual igual al momento dipolar total de la esfera.
  - Calcular el potencial escalar magnético  $\Phi_{\mathbf{H}}$  usando ahora separación de variables en esféricas.
  - Calcular el potencial vector  $\mathbf{A}$  mediante la integral de Poisson y, a partir de ahí,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ .
  - La misma esfera magnetizada está ahora situada en un medio lineal, isótropo y homogéneo de permeabilidad  $\mu$ , que se extiende entre  $r = a$  y  $r = b > a$ , concéntrico con la esfera. Calcule los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio y encuentre el momento magnético total  $\mathbf{m}$  inducido en el medio. Verifique que para  $\mu = 1$  se obtienen los resultados de los ítems anteriores.
7. *Imán cilíndrico.* Un cilindro de radio  $a$  y longitud  $L$  está orientado según la dirección  $z$ , con sus tapas en  $z = \pm L/2$ , y está caracterizado por una densidad de magnetización uniforme  $\mathbf{M} = M\hat{z}$ .
- Mediante la integral de Poisson, calcular el potencial vector  $\mathbf{A}$  en coordenadas cilíndricas desarrollado según las funciones de Bessel  $J_{\nu}(k\rho)$ , y a partir de ahí calcular los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ . (Ayuda: en la integral de Poisson, escribir  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  según el tipo de desarrollo buscado.)
  - Mediante la integral de Poisson, calcular el potencial vector  $\mathbf{A}$  en coordenadas cilíndricas desarrollado como una integral de Fourier en  $z$ , y a partir de ahí calcular los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ .
  - Calcular los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  a partir de un potencial escalar magnético  $\Phi_{\mathbf{H}}$ , continuo en todo el espacio y tal que  $-\nabla\Phi_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ . Escribir  $\Phi_{\mathbf{H}}$  como un desarrollo en las funciones de Bessel  $J_{\nu}(k\rho)$  o como una integral de Fourier en  $z$ . Comparar, según el caso, con los ítems (a) y (b).
  - ¿A qué distribución de corriente es equivalente este imán?
  - A partir del campo del imán, calcular el campo  $\mathbf{B}$  producido por un solenoide cilíndrico, de radio  $a$  y longitud  $L$ , por el que circula una corriente  $I$  y que tiene  $n$  espiras por unidad de longitud.

- (f) Calcular explícitamente los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  del imán cuando  $L \rightarrow \infty$ .
- (g) Demuestre, por analogía, que el campo magnético de un solenoide infinito de sección arbitraria es cero en su exterior y constante en su interior.

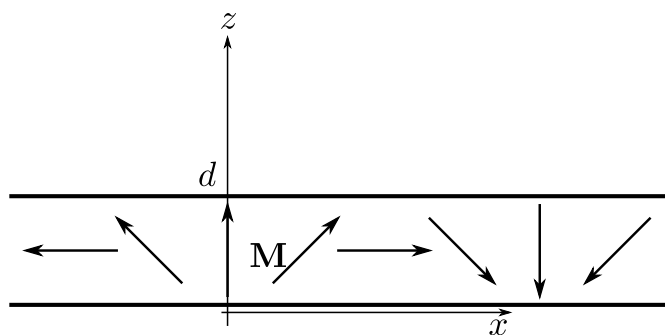
8. *Imán Borgeano*. Para que no se acostumbren a pensar que todos los imanes tienen una magnetización uniforme, aquí se les propone el caso de un imán limitado por los planos  $z = 0$  y  $z = d$ . En las direcciones  $x$  e  $y$  se extiende entre  $-\infty$  y  $+\infty$ . La densidad de magnetización dentro del imán está dada por

$$\mathbf{M}(x) = m_0 (\sin qx \hat{x} + \cos qx \hat{z}),$$

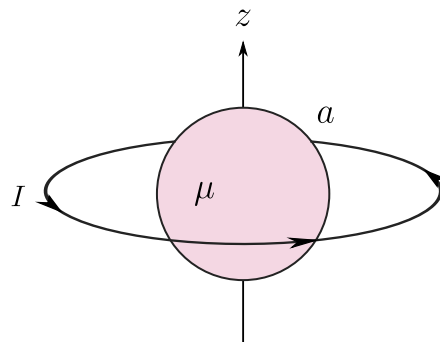
con  $q > 0$ . Es decir, según un corte en el plano  $xz$ , la magnetización va rotando como en la figura de abajo. Puesto que la magnetización es permanente y conocida en todo el espacio, el paso a un problema electrostático equivalente es el camino más sencillo. Pero como  $\mathbf{M}$  no es uniforme, puede haber cargas superficiales y de volumen,

$$\sigma = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{n}, \quad \rho = -\nabla \cdot \mathbf{M}.$$

- (a) Calcular el potencial escalar para el campo  $\mathbf{H}$  y el campo magnético en todo el espacio, pero especialmente en las regiones por encima y por debajo del imán. *Ayuda*: Integrar la función de Green para cada contribución.
- (b) La solución es una expresión cerrada que no incluye sumatorias ni integrales. Cuando la obtengan, hagan un poco de ingeniería inversa: analicen a posteriori qué tipo de cosas podrían haber deducido a priori. Esto, en algunos ámbitos, recibe el nombre de *mixtificación*, o también *trampa*, pero en física suele ser el camino normal cuando uno se enfrenta a problemas nuevos. Con la solución a la vista, súbitamente se vuelven triviales varias cosas, y entonces pueden dar una solución más compacta y razonada.
- (c) Si el resultado no les parece desconcertante, es que hicieron algo mal o que no tienen corazón. Por fin, ¿dónde está lo borgeano de este imán? Descubran ustedes en qué línea del poema *La cierva blanca* se esconde una referencia borgeana al imán que acabamos de describir.



Problema 8.



Problema 9.

9. Una esfera de radio  $a$ , magnetizable con permeabilidad  $\mu$ , está centrada con una espira de radio  $b > a$  por donde circula una corriente  $I$ , como muestra la figura.

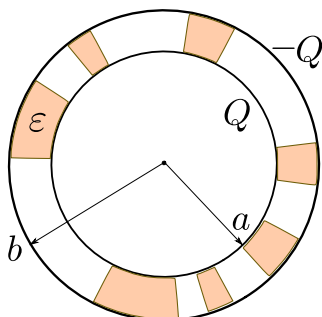
- (a) Indicar todas las fuentes de cada uno de los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ .

- (b) ¿Por qué no es cierto que  $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_{\mathbf{H}}$ ? (con  $\Phi_{\mathbf{H}}$  el potencial escalar magnético continuo en todo el espacio).
- (c) Calcular el campo magnético en todo el espacio en términos del campo  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_d$ , con fuentes en su rotor y fuentes en su divergencia.

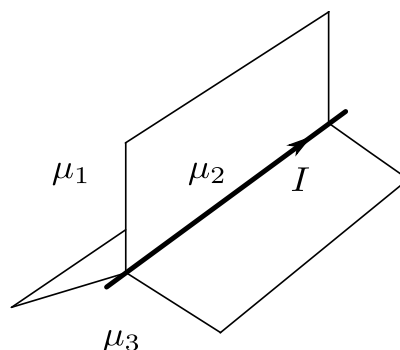
**Problemas sin cuentas.\***

10.\* *Pinchaduras.* Las esferas de la figura tienen radios  $a$  y  $b$ , son conductoras y están aisladas. El espacio entre ellas está parcialmente ocupado por un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ . Sólo una fracción  $x$  del volumen entre las esferas está ocupado por el dieléctrico. Los espacios vacíos empiezan en una esfera y terminan en la otra, no son uniformes y se extienden por trechos al azar, pero se caracterizan por tener sus paredes orientadas según la dirección radial. Sobre la esfera de radio  $a$  se deposita una carga libre  $Q$ , y sobre la de radio  $b$  una carga libre  $-Q$ . Sólo se conocen los valores de estas cargas, no cómo se distribuyen.

- (a) Demuestre que un campo eléctrico con simetría esférica es compatible con las condiciones de contorno sobre todas las interfaces. De las hipótesis formuladas en el enunciado, ¿cuál es la que resulta fundamental para poder afirmar lo anterior?
- (b) Encuentre los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en la región entre las dos esferas y las distribuciones de carga libre y de polarización.



Problema 10.



Problema 11.

11.\* Una corriente  $I$  fluye por un cable delgado a lo largo del eje  $z$  (ver figura). Tres semiplanos que forman entre sí ángulos  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$ ) se intersectan a lo largo de ese eje. Las regiones entre los planos tienen permeabilidades  $\mu_1, \mu_2$  y  $\mu_3$ . Demuestre que un campo magnético con simetría cilíndrica es compatible con todas las condiciones del problema. Físicamente, ¿cuál es el motivo? Encuentre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio.

**Momentos multipolares.**

12. (a) Probar que los momentos multipolares de una distribución de carga con simetría esférica son nulos salvo el monopolar.
- (b) Probar que el momento dipolar de una distribución de carga neutra no depende del origen. En general, probar que el primer momento multipolar no nulo es independiente del origen.

- (c) Encontrar las expresiones para los momentos multipolares (en esféricas) de una distribución con simetría azimutal y escribir la expansión correspondiente.
13. Analizar los momentos multipolares, hasta el cuadrupolar, de las siguientes distribuciones de carga, y en el caso de tener momento cuadrupolar determinar sus ejes principales:
- Un anillo de radio  $a$  cargado uniformemente con carga total  $Q$ .
  - Un disco cargado con una distribución cilíndricamente simétrica respecto de su eje.
  - Un cubo uniformemente cargado en volumen. Estimar el error en el *campo eléctrico* si a un cubo de 10 cm de lado se lo considera como una carga puntual a distancias del orden de 1 m de su centro. ¿A qué distancia el error es del orden del 1 %?
14. Calcule todos los momentos multipolares del problema del anillo de la Guía 2 (anillo de radio  $b$ , cargado uniformemente, concéntrico con una esfera a tierra de radio  $a < b$ ), y del problema del disco uniformemente cargado, de radio  $a$ , de la misma Guía.
- 15.\* ¿Es lo mismo tener una gran distribución de carga lejos que una pequeña distribución cerca? Calcular la densidad  $\rho_\alpha$  de una distribución de carga  $\rho$  que se ha expandido o contraído uniformemente un factor  $\alpha$ . Expansión significa  $\alpha > 1$ , y contracción,  $0 < \alpha < 1$ . Geométricamente, la transformación lleva el punto  $\mathbf{r}$  al punto  $\alpha\mathbf{r}$ , y la carga contenida en el elemento de volumen  $d^3\mathbf{r}$  al elemento de volumen  $d^3(\alpha\mathbf{r})$ . ¿Cuál es el potencial  $\Phi_\alpha$  de la distribución transformada en términos del potencial original  $\Phi$ ? ¿Cómo se relacionan entre sí los momentos multipolares de orden  $l$ ,  $Q_\alpha^{(lm)}$ , de la distribución transformada y los momentos  $Q^{(lm)}$  de la original? Volviendo a la pregunta inicial: ¿en qué sentido es equivalente ver una distribución desde una distancia  $L = \alpha d$ , con  $\alpha > 1$ , a verla desde una distancia  $d$  pero contraída un factor  $1/\alpha$ ?

$$\text{Respuestas: } \rho_\alpha(\mathbf{r}) = \rho\left(\frac{\mathbf{r}}{\alpha}\right), \quad \Phi_\alpha(\mathbf{r}) = \Phi\left(\frac{\mathbf{r}}{\alpha}\right), \quad Q_\alpha^{(lm)} = \alpha^{l-3} Q^{(lm)}$$