

FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2020

PRÁCTICA DEL 02/11: GUÍA 6 - ONDAS PLANAS

Ecuaciones de Maxwell (unidades: cgs-Gaussiano) en medios lineales isótropos y homogéneos libres de fuentes ($\rho_\ell, \mathbf{J}_\ell$):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}\end{aligned}$$

Ecuaciones de ondas vectoriales en 3 dimensiones (en ausencia de fuentes):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 & ; & & \nabla^2 \mathbf{B} - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0 \\ n &= \sqrt{\mu\epsilon} & : & \text{índice de refracción}\end{aligned}$$

Soluciones de ondas planas con frecuencia angular ω :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re e [E e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{v}_E] \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re e [B e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{v}_B] \quad ; \quad E, B \in \mathbb{C}, \hat{v}: \text{versores}$$

[trabajamos con los campos complejos y tomamos parte real al final del cálculo, o en la instancia adecuada]

Número de onda: $\mathbf{k} = k \hat{k}$

Relación de dispersión (no dispersiva): $k^2 = n^2 \omega^2 / c^2$

Superficies de fase constante: $\phi = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t_0 = cte. : \text{son planos en 3 dimensiones}$

Propiedades:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 ; & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \implies \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 ; & \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}\end{aligned}$$

Para ondas planas queda: $\mathbf{B} = n \hat{k} \times \mathbf{E}$

Condiciones en una interfase

Condiciones cinemáticas en la interfase:

mismas frecuencias: $\omega_1 \equiv \omega \equiv \omega_2$

\mathbf{k} coplanares: $k_{1xy} = k_{2xy}$

Ley de Snell: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

Condiciones dinámicas en la interfase:

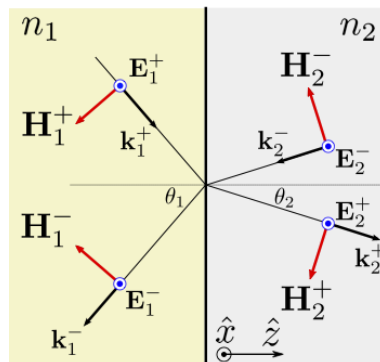
$$[\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad : \text{continuidad de } \mathbf{D} \text{ normal}$$

$$[\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad : \text{continuidad de } \mathbf{E} \text{ tangencial}$$

$$[\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad : \text{continuidad de } \mathbf{B} \text{ normal}$$

$$[\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad : \text{continuidad de } \mathbf{H} \text{ tangencial}$$

Caso Trasverso Eléctrico (TE): el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia
 (Plano de incidencia: el plano definido por los $\hat{\mathbf{k}}$)



continuidad de \mathbf{D} normal: *trivial*

continuidad de \mathbf{E} tangencial:
$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^-$$

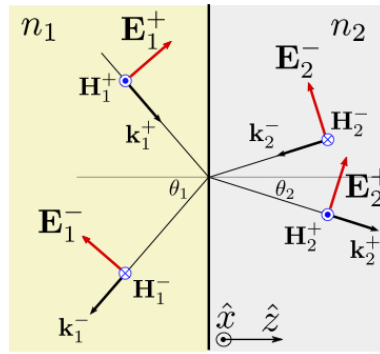
continuidad de \mathbf{B} normal:
$$\sin \theta_1 (B_1^+ + B_1^-) = \sin \theta_2 (B_2^+ + B_2^-) \implies$$

$$n_1 \sin \theta_1 (E_1^+ + E_1^-) = n_2 \sin \theta_2 (E_2^+ + E_2^-) \quad (\equiv \text{Ley Snell} + \text{cont. } E_{tan})$$

continuidad de \mathbf{H} tangencial:
$$\cos \theta_1 (-H_1^+ + H_1^-) = \cos \theta_2 (-H_2^+ + H_2^-) \implies$$

$$\bar{n}_1 (E_1^+ - E_1^-) = \bar{n}_2 (E_2^+ - E_2^-) \quad ; \quad \bar{n}_i \equiv \frac{n_i \cos \theta_i}{\mu_i}$$

Caso Trásverso Magnético (TM): el campo magnético es perpendicular al plano de incidencia.



continuidad de **D** normal: $\epsilon_1 \sin \theta_1 (E_1^+ - E_1^-) = \epsilon_2 \sin \theta_2 (E_2^+ - E_2^-)$: Ley Snell + cont. H_{tan}

continuidad de **E** tangencial: $\cos \theta_1 (E_1^+ + E_1^-) = \cos \theta_2 (E_2^+ + E_2^-) \implies$

$$\boxed{(\tilde{E}_1^+ + \tilde{E}_1^-) = (\tilde{E}_2^+ + \tilde{E}_2^-)} \quad ; \quad \tilde{E}_i \equiv E_i \cos \theta_i$$

continuidad de **B** normal: *trivial*

continuidad de **H** tangencial: $H_1^+ - H_1^- = H_2^+ - H_2^- \implies$

$$\boxed{\tilde{n}_1 (\tilde{E}_1^+ - \tilde{E}_1^-) = \tilde{n}_2 (\tilde{E}_2^+ - \tilde{E}_2^-)} \quad ; \quad \tilde{n}_i \equiv \frac{n_i}{\mu_i \cos \theta_i}$$

Problema 1: Coeficientes de Fresnel

Encontrar las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas en el problema de una interfase entre dos dieléctricos para incidencia TM y TE.

Caso TE:

Una interfase con: $E_i = E_1^+$ (incidente), $E_r = E_1^-$ (reflejada), $E_t = E_2^+$ (transmitida) y $E_2^- = 0$ (condiciones de contorno).

continuidad de **E** tangencial: $E_1^+ + E_1^- = E_2^+$

continuidad de **H** tangencial: $\bar{n}_1 (E_1^+ - E_1^-) = \bar{n}_2 E_2^+ \quad ; \quad \bar{n}_i \equiv \frac{n_i \cos \theta_i}{\mu_i}$

\implies Coeficientes de Fresnel, caso TE
$$\left\{ \begin{array}{l} R_{12} \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{\bar{n}_1 - \bar{n}_2}{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} \\ T_{12} \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 \bar{n}_1}{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} \end{array} \right.$$

Caso TM:

Una interfase con: $E_i = E_1^+$ (incidente), $E_r = E_1^-$ (reflejada), $E_t = E_2^+$ (transmitida) y $E_2^- = 0$ (condiciones de contorno).

continuidad de \mathbf{E} tangencial: $\left(\tilde{E}_1^+ + \tilde{E}_1^- \right) = \tilde{E}_2^+ \quad ; \quad \tilde{E}_i \equiv E_i \cos \theta_i$

continuidad de \mathbf{H} tangencial: $\tilde{n}_1 \left(\tilde{E}_1^+ - \tilde{E}_1^- \right) = \tilde{n}_2 \tilde{E}_2^+ \quad ; \quad \tilde{n}_i \equiv \frac{n_i}{\mu_i \cos \theta_i}$

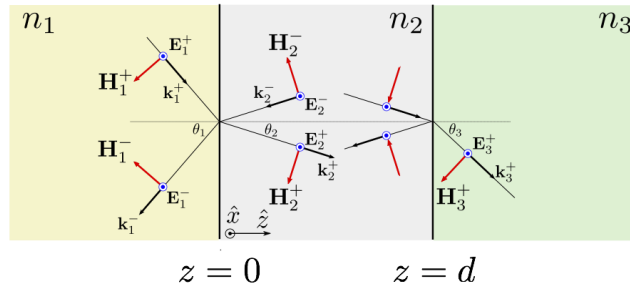
\implies Coeficientes de Fresnel, caso TM $\left\{ \begin{array}{l} R_{12} \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \\ T_{12} \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 \tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \left(\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \right) \end{array} \right.$

Problema de las dos interfases (problema 2)

Una lámina dieléctrica de permitividad ϵ_2 y espesor d separa dos medios semiinfinitos que tienen permitividades ϵ_1 y ϵ_3 ($\mu = 1$ en todo el espacio). Una onda plana de amplitud E_i incide sobre la interfase que separa los medios 1 y 2, formando un ángulo θ_1 con la normal.

(a) (Considerar por separado los casos TE y TM.)

Caso TE:



$$\mathbf{E}_1^\pm(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[E_1^\pm e^{i(\mathbf{k}_1^\pm \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{x} \right] \quad ; \quad E_1^+ \equiv E_i$$

$$\mathbf{E}_2^\pm(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[E_2^\pm e^{i(\mathbf{k}_2^\pm \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{x} \right]$$

$$\mathbf{E}_3^+(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[E_3^+ e^{i(\mathbf{k}_3^+ \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{x} \right] \quad ; \quad E_3^- = 0$$

En la segunda interfase ($z = d$) tenemos: (entendiendo que se debe tomar $\text{Re}[\dots]$)

$$\mathbf{E}_2^\pm(\mathbf{r}, t) \Big|_{z=d} = E_2^\pm e^{\pm i\alpha_2} e^{i(\mathbf{k}_2^\pm \cdot \vec{\rho} - \omega t)} \hat{x} \quad ; \quad \alpha_2 \equiv d k_2 \cos \theta_2, \quad (\vec{\rho} = x \hat{x} + y \hat{y})$$

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t) \Big|_{z=d} = \underbrace{E_3^+}_{\equiv E_t} e^{i\alpha_3} e^{i(\mathbf{k}_3^+ \cdot \vec{\rho} - \omega t)} \hat{x} \quad ; \quad \alpha_3 \equiv d k_3^+ \cos \theta_3$$

Aparecen desfases (α) propios de la propagación en el medio de espesor d . Por comodidad definimos la magnitud E_t para la parte transmitida, para no arrastrar el factor con α_3 en todas las ecuaciones.

Sistema de ecuaciones que determina todos los campos:

En la interfase $z = 0$ (idem problema 1):

continuidad de **E** tangencial: $E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^-$

continuidad de **H** tangencial: $\bar{n}_1 (E_1^+ - E_1^-) = \bar{n}_2 (E_2^+ - E_2^-) \quad ; \quad \bar{n}_i \equiv \frac{n_i \cos \theta_i}{\mu_i}$

En la interfase $z = d$ (idem problema 1, pero con el desfase):

continuidad de **E** tangencial: $E_2^+ e^{i\alpha_2} + E_2^- e^{-i\alpha_2} = E_t$

continuidad de **H** tangencial: $\bar{n}_2 (E_2^+ e^{i\alpha_2} - E_2^- e^{-i\alpha_2}) = \bar{n}_3 E_t$

Resolución del sistema de ecuaciones para los campos: pueden hacerlo directamente desde aquí. En el ítem (b) se propone un planteo con un método alternativo que reduce las cuentas.

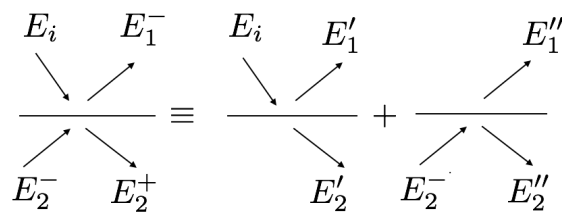
(b) (seguimos con el caso TE)

Método alternativo y mucho más práctico: primero, notar que en la segunda interfase el problema involucra sólo tres ondas, de manera que las amplitudes están relacionadas por los coeficientes de transmisión y reflexión usuales, T_{23} y R_{23} , esto es:

$$E_t = T_{23} E_2^+ e^{i\alpha_2}$$

$$E_2^- e^{-i\alpha_2} = R_{23} E_2^+ e^{i\alpha_2}$$

¡Atención a las fases! Vemos que esto elimina dos incógnitas de un plumazo. Por otro lado en la primera interfase descomponemos el problema como la superposición (aparece -también- en su versión dinámica como método práctico de resolución) de dos problemas de tres ondas, con una onda incidente a cada lado de la interfase. ¡Haga un dibujo, díantres!



$$E_1^- = E_1' + E_1'' = R_{12} E_i + T_{21} E_2^-$$

$$E_2^+ = E_2' + E_2'' = T_{12} E_i + R_{21} E_2^-$$

Podemos despejar primero E_2^+ en función de E_i , y luego es directo obtener el campo reflejado hacia el primer medio y el transmitido hacia el tercero dados por las siguientes amplitudes:

$$R \equiv \frac{E_1^-}{E_1^+} \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{R_{12} + R_{23} e^{2i\alpha_2}}{1 + R_{12} R_{23} e^{2i\alpha_2}}$$

$$T \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{T_{12} T_{23} e^{i\alpha_2}}{1 + R_{12} R_{23} e^{2i\alpha_2}}$$

donde usamos que: $T_{ij} T_{ji} = 1 - R_{ij}^2$ y que $R_{ij} = -R_{ji}$ (muestrelo), con donde R_{ij} y T_{ij} los coeficientes de reflexión y transmisión para una sola interfase como calculamos en el problema 1.

(c) Para $\theta_1 = 0$, calcular el **promedio temporal** de los vectores de Poynting

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

en los tres medios y verificar que son iguales. Como \mathbf{S} no es lineal, hay que usar las expresiones reales de los campos. En particular, como queremos el promedio temporal, podemos usar la siguiente propiedad (que sugiero que chequeen por su cuenta): Dados $A(t) = \text{Re}[Ae^{-i\omega t}]$ y $B(t) = \text{Re}[Be^{-i\omega t}]$, el promedio temporal en un número entero de períodos $T = 2\pi/\omega$ es:

$$\langle AB \rangle \equiv \langle AB \rangle_T = \frac{1}{2} \text{Re}[AB^*]$$

Para el medio 1:

$$\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re} \left[\left(\mathbf{E}_1^+ e^{i\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{E}_1^- e^{i\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r}} \right) \times \left(\mathbf{H}_1^+ e^{i\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{H}_1^- e^{i\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r}} \right)^* \right]$$

usando que para ondas planas $\mathbf{H} = (n/\mu) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$, y que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, se tiene

$$\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{n_1}{\mu_1} \left(|E_1^+|^2 \hat{\mathbf{k}}_1^+ + |E_1^-|^2 \hat{\mathbf{k}}_1^- + \text{otros términos de interferencia} \right)$$

donde los términos de interferencia corresponden, en general, a la superposición constructiva y destructiva de las dos ondas que se propagan en el medio. Como nos interesa el caso de incidencia normal $\hat{\mathbf{k}}_1^+ = -\hat{\mathbf{k}}_1^- = \hat{\mathbf{z}}$, obtenemos

$$\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c n_1}{8\pi \mu_1} (1 - |R|^2) E_i^2 \hat{\mathbf{z}}$$

La energía fluye en dirección $\hat{\mathbf{z}}$ y en promedio es la misma en cada punto del medio 1 (¿Porqué?). En el medio 3, el calculo del promedio temporal del vector de Poynting es mas sencillo pues sólo tenemos onda transmitida y no hay superposición de ondas, esto es

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c n_3}{8\pi \mu_3} |T|^2 E_i^2 \hat{\mathbf{z}}$$

Queda para ustedes el cálculo explícito del vector de Poynting promediado en el medio 2. Los tres deben coincidir pues el flujo de energía electromagnética en cada interfase es el mismo a cada lado -necesariamente- debido a la conservación de la energía (no hay disipación por efecto Joule y no variación de la energía electromagnética en promedio). Para corroborar que $\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{S}_2(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle$ usen las expresiones

obtenidas para R y para T en el problema de dos interfases y los coeficientes de Fresnel R_{ij} y T_{ij} en incidencia normal, puede ayudar usar la relación $1 - R_{ij} = T_{ij}T_{ji}$ (o directamente algún programa de cálculo).

(d) Para $\theta_1 = 0$, ¿qué condición deben cumplir d y los ϵ_i para que no haya onda reflejada en el medio 1?

Para responder debemos mirar el coeficiente R calculado en el ítem (b) de este apunte (o en el (a), si lo terminaron de despejar):

$$R \equiv \frac{E_1^-}{E_1^+} \Big|_{\mu_i=1; \theta_1=0} = \frac{n_2(n_1 - n_3) \cos \alpha_2 + i(n_2^2 - n_1n_3) \sin \alpha_2}{n_2(n_1 + n_3) \cos \alpha_2 - i(n_2^2 + n_1n_3) \sin \alpha_2}$$

y anular la parte real y la parte imaginaria, esto es:

$$n_2(n_1 - n_3) \cos \alpha_2 = 0$$

$$(n_2^2 - n_1n_3) \sin \alpha_2 = 0$$

Para anular las debe ser

$$n_1 = n_3 \quad , \quad n_2^2 = n_1n_3 \quad : \text{ no hay interfase}$$

$$\boxed{n_1 = n_3 \quad , \quad \sin \alpha_2 = 0} \implies \alpha_2 = k_2d = m\pi \implies m\lambda_2 = 2d, \quad m \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$\boxed{\cos \alpha_2 = 0 \quad , \quad n_2^2 = n_1n_3} \implies \alpha_2 = k_2d = (2m - 1)\pi/2 \implies (2m - 1)\lambda_2 = 4d, \quad m \in \mathbb{N} \quad (2)$$

El caso (1) se entiende rápidamente en términos de la longitud de onda en el medio 2: la fase debida a un viaje de ida y vuelta por el medio de espesor d es $2m\pi$ y sumando la fase π acumulada por las reflexiones (que se produce cuando $n_{inc} < n_{tran}$ en el caso TE -ver el cambio de signo en el coeficiente de Fresnel R_{ij}) queda un desfase de medio ciclo cancelando exactamente la superposición de ondas reflejadas en la primera interfase. El caso (1) se puede entender de la misma manera pero involucrando un número par de fases π acumuladas por reflexión.

Problema 6: Reflexión y transmisión en un buen conductor

Considerar el problema de incidencia de una onda plana sobre una interfase vacío–conductor óhmico. El conductor ocupa el semiespacio $0 < z$. Asumir que $\epsilon' = \mu' = 1$ en todo el espacio, y que la conductividad σ del conductor es independiente de la frecuencia. Asimismo, asumir que $\omega \ll \sigma$. La onda incide desde el vacío con un ángulo θ .

(a) Las ecuaciones de Maxwell dentro de un conductor óhmico donde $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ y con $\mu' = \epsilon' = 1$ son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Reemplazando en las dos primeras las soluciones de ondas planas (entendiendo que se debe tomar $\Re[\dots]$)

$$\mathbf{E} = E e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{v}_E, \quad \mathbf{B} = B e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{v}_B, \quad (\hat{v}: \text{versores})$$

se tiene que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$, mientras que de las otras dos se obtiene

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c} \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}.$$

Tomando $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})$ y usando la última para deshacerse de \mathbf{B} , llegamos a que el producto escalar del vector de onda consigo mismo es

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left[1 + 2i \left(\frac{c}{\omega\delta} \right)^2 \right], \quad (4)$$

donde definimos el número de onda y la longitud de penetración en el conductor como

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= k \hat{\mathbf{n}} \quad ; \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1 \\ \delta &= \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \end{aligned} \quad (5)$$

El índice de refracción puede leerse de la definición $k(\omega) = n' \frac{\omega}{c}$. Por lo que

$$n' = \left[1 + 2i \left(\frac{c}{\omega\delta} \right)^2 \right]^{1/2}$$

(no confundir el versor $\hat{\mathbf{n}}$ con el índice de refracción n')

La definición de buen conductor es $\delta \ll \lambda_0 = c/\omega$ o, como indica el enunciado, consider $\sigma \gg \omega$ para directamente despreciar el término de corrientes de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell. La aproximación corresponde a prescindir del término real en la ecuación (4), es decir $k^2 \approx 2i/\delta^2$, tal que la relación de dispersión para un buen conductor queda

$$k(\omega) = \frac{1+i}{\delta}. \quad (6)$$

y el índice de refracción para un buen conductor es

$$n' = \frac{c}{\omega\delta} (1+i). \quad (7)$$

(b) Encontrar el **vector de onda** en el conductor, eligiendo la solución que es apropiada para la región $0 < z$. Escribir explícitamente la parte real y la parte imaginaria del vector de onda. ¿En qué dirección se propaga la onda transmitida? ¿En qué dirección se atenúa? ¿Cuál es la longitud típica de atenuación? ¿Qué pasa con la dirección de propagación a medida que el espesor pelicular $\delta \rightarrow 0$?

El conductor se ubica en el espacio semi infinito con $z < 0$, la incidente se propaga desde los $z > 0$, en vacío, con número de onda $k_0 = \omega/c$ y ángulo de incidencia θ . Planteamos el problema para el caso Traslverso Eléctrico. Los campos incidente, reflejado y transmitido son (TE):

$$\mathbf{E}_0 = E_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{x}, \quad \mathbf{E}_r = E_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{x}, \quad \mathbf{E} = E e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{x},$$

en donde los vectores de onda quedan definidos por

$$\mathbf{k}_0 = k_{0y} \hat{y} + k_{0z} \hat{z}, \quad \mathbf{k}_r = k_{ry} \hat{y} + k_{rz} \hat{z}, \quad \mathbf{k} = k_y \hat{y} + k_z \hat{z}. \quad (8)$$

La ley de Snell establece

$$k_0 \sin \theta = k_{0y} = k_{ry} = k_y = k \sin \theta'$$

El ángulo de transmisión θ' , queda definido por este $\sin \theta'$, en función de θ , k_0 y k . La componente z de la onda transmitida será compleja para poder satisfacer la relación de dispersión de k en el conductor. Escribimos esa componente como

$$k_z = k' + ik'',$$

de modo que al hacer el producto escalar de \mathbf{k} consigo mismo tenemos

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (k_0 \sin \theta)^2 + k'^2 - k''^2 + 2ik'k''. \quad (9)$$

Igualando las partes reales e imaginarias de la expresión anterior con (4), y luego de resolver una cuártica (usando, por ejemplo, el Mathematica), se obtiene que

$$k' = -\frac{1}{\delta} \sqrt{(1 + \beta^2)^{1/2} + \beta} \approx -\delta^{-1} \quad ; \quad \text{donde } \beta = \frac{\delta^2 k_0^2 \cos^2 \theta}{2} \ll 1 : \text{ buen conductor.} \quad (10)$$

$$k'' = -\frac{1}{\delta} \sqrt{(1 + \beta^2)^{1/2} - \beta} \approx -\delta^{-1}$$

Esta solución de (9) satisface las condiciones de contorno para el campo transmitido en el conductor

$$\mathbf{E} = E e^{-zk''} e^{i(y k_0 \sin \theta + zk' - \omega t)} \hat{x};$$

$k' \approx -\delta^{-1} < 0$ es la parte real de la componente k_z y determina que la propagación en esa dirección sea en sentido de $-\hat{z}$, y $k'' \approx -\delta^{-1}$ produce una atenuación del campo hacia los z negativos en un longitud característica δ . Las superficies de amplitud constante son los planos $zk'' = cte.$, las superficies de fase constante son los planos $y k_0 \sin \theta + zk' = cte.$ Los planos de amplitud constante son paralelos a la interfase. La dirección de propagación es perpendicular a los planos de fase constante y el ángulo de refracción *real* ψ de la onda transmitida respecto a la normal a la interfase $\hat{\perp} = -\hat{z}$, puede definirse a partir de

$$\sin \psi = \frac{k_y}{(k_y^2 + k'^2)^{1/2}} \approx \delta k_0 \sin \theta.$$

A mayor conductividad o menor frecuencia el ángulo $\psi \rightarrow 0$ y la propagación en el conductor queda en la dirección normal a la superficie. Para un metal como el cobre $\sigma \simeq 5 \times 10^{17} s^{-1}$, a una frecuencia baja de 60Hz se tiene un espesor pelicular $\delta \simeq 1cm$ y $\psi \simeq (10^{-7})^\circ$. Para materiales no metálicos con menor conductividad, el ángulo ψ también puede ser aproximadamente cero; en agua de mar $\sigma \simeq 5 \times 10^{10} s^{-1}$, y a una frecuencia de 100kHz se obtiene $\delta_{agua}^{100kHz} \simeq 70cm$ y $\psi_{agua}^{100MHz} \simeq 0, 1^\circ$.

(c) *Encontrar las amplitudes (complejas) de las ondas reflejadas y transmitidas. Estudiar el límite $\delta \rightarrow 0$. Considerar los casos TE y TM.*

(seguimos sólo con el caso TE)

De la continuidad de las componentes tangenciales en la interfase vacío–buen conductor de los campos eléctrico y magnético (con permeabilidades $\mu = 1$ en todo el espacio) se tiene el sistema

$$E_0 + E_r = E, \quad k_{0z} E_0 + k_{rz} E_r = k_z E.$$

Reemplazando $k_{rz} = -k_{0z}$, se puede escribir los coeficientes de reflexión y transmisión en término de las componentes de los números de onda como

$$R = \frac{E_r}{E_0} = \frac{k_{0z} - k_z}{k_{0z} + k_z}, \quad T = \frac{E}{E_0} = \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_z}. \quad (11)$$

Apéndice: podemos hacer el ejercicio de llegar a estas expresiones partiendo de la forma tradicional de escribir los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión para incidencia TE en un ángulo θ . Estos estaban resueltos en el Problema 1 y podemos escribirlos como

$$R_{Fresnel}^{TE} = \frac{(n/\mu) \cos \theta - (n'/\mu') \cos \theta'}{(n/\mu) \cos \theta + (n'/\mu') \cos \theta'}, \quad T_{Fresnel}^{TE} = \frac{2(n/\mu) \cos \theta}{(n/\mu) \cos \theta + (n'/\mu') \cos \theta'}$$

Los parámetros sin primar corresponden al semiespacio vacío desde donde incide la onda plana, y los primados al conductor. Reemplazado $\mu = \mu' = 1$ y $n' = \frac{k}{\omega/c}$ llegamos a la siguiente expresión de R y de T)

$$R = \frac{k_0 \cos \theta - k \cos \theta'}{k_0 \cos \theta + k \cos \theta'}, \quad T = \frac{2k_0 \cos \theta}{k_0 \cos \theta + k \cos \theta'} \quad (12)$$

Los cosenos de los ángulos incidente y transmitido, como se usan en los coeficientes de Fresnel, están definidos a partir de la normal a la interfase $\hat{\perp}$ que apunta desde el medio de incidencia hacia el refractante mediante el producto escalar, esto es:

$$\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\perp} \equiv k_0 \cos \theta \doteq k_{0\perp} (= -k_{0z}), \quad \mathbf{k} \cdot \hat{\perp} \equiv k \cos \theta' \doteq k_{\perp} (= -k_z).$$

Reemplazando esto último en (12), los coeficientes quedan escritos como en (11) sin nombrar a los ángulos

$$R = \frac{k_{0\perp} - k_{\perp}}{k_{0\perp} + k_{\perp}}, \quad T = \frac{2k_{0\perp}}{k_{0\perp} + k_{\perp}}.$$

Volviendo a la interfase vacío–buen conductor del problema, usando $k_{0z} = -k_0 \cos \theta$ y $k_z \approx -(1+i)/\delta$ se obtiene

$$R \approx -1 + (1-i)k_0\delta \cos \theta, \quad (13)$$

donde se retuvieron términos a primer orden en $k_0\delta \sim (\omega/\sigma)^{1/2} \gg (\omega/\sigma)$. Análogamente, el coeficiente de transmisión queda

$$T \approx (1-i)\delta k_0 \cos \theta. \quad (14)$$

Las amplitudes reflejada y transmitida son casi independientes del ángulo de incidencia en la mayoría de los metales a frecuencias menores al THz. En un conductor ideal, $\delta \rightarrow 0$, no hay onda transmitida: Los campos son nulos en el interior del conductor, el campo eléctrico exterior es normal al conductor y se produce una corriente superficial sobre la interfase (debido a que el espesor pelicular δ tiende a cero) encargada de conservar la componente tangencial de \mathbf{H} sobre la interfase.

(d) *Demostrar que para un buen conductor el coeficiente de reflexión es aproximadamente $r \approx 1 - 2\delta\omega/c$.*

El coeficiente de intensidad reflejada r se define como el cociente entre el flujo de la energía de la onda reflejada y de la incidente,

$$r = \frac{\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{E}_r^*}{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*} = \frac{E_r E_r^*}{E_0 E_0^*} = RR^* = |R|^2 \approx 1 - 2\delta k_0 \cos \theta. \quad (15)$$

Para incidencia normal se obtiene el resultado que pide el ítem (d) del problema.

Problema propuesto: Estudiar el balance de energía dentro del conductor. Plantear el balance de energía en una columna de área unidad que se extiende desde la superficie del conductor hasta una distancia z dentro de él, usando la aproximación de buen conductor. Esto involucra el cálculo del vector de Poynting y el de la energía disipada por efecto Joule dentro del conductor.