Física Teórica 1 - 2do cuatrimestre de 2020 - Clase 18. Guía 6: Ondas Planas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

Miércoles 4/11

Índice

- **Repaso de la clase pasada: Problema de las dos interfaces**
- **Problema 3: Reflexión total interna**
- **Problema 4: Reflexión total interna frustrada**

Repaso de la clase pasada: Problema de las dos interfaces

Solución de Ondas Planas

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbb{R}\mathrm{e}\left[E\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\hat{v}_E\right] \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbb{R}\mathrm{e}\left[B\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\hat{v}_B\right] \qquad k^2 = n^2\omega^2/c^2$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0\,; \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \mathbf{B} = n\,\hat{k}\times\mathbf{E}$$

Condiciones en la interfase

$[\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1]\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0$: continuidad de **D** normal

$[\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1]\times\hat{\mathbf{n}} = 0$: continuidad de **E** tangencial

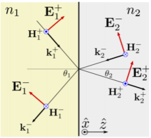
$[\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1]\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0$: continuidad de **B** normal

$[\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1]\times\hat{\mathbf{n}} = 0$: continuidad de **H** tangencial

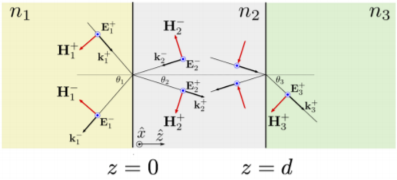
mismas frecuencuas: $\omega_1 \equiv \omega \equiv \omega_2$

k coplanares: $k_{1xy} = k_{2xy}$

Ley de Snell: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$



Repaso de la clase pasada: Problema de las dos interfaces



Las ecuaciones a resolver en cada interfaz son

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^- \qquad\qquad E_2^+ e^{i\alpha_2} + E_2^- e^{-i\alpha_2} = E_t$$

$$\bar{n}_1 \left(E_1^+ - E_1^-\right) = \bar{n}_2 \left(E_2^+ - E_2^-\right) \quad ; \quad \bar{n}_i \equiv \frac{n_i \cos\,\theta_i}{\mu_i} \qquad \bar{n}_2 \left(E_2^+ e^{i\alpha_2} - E_2^- e^{-i\alpha_2}\right) = \bar{n}_3\, E_t$$

Y los coeficientes de reflexión y trasnmición quedan

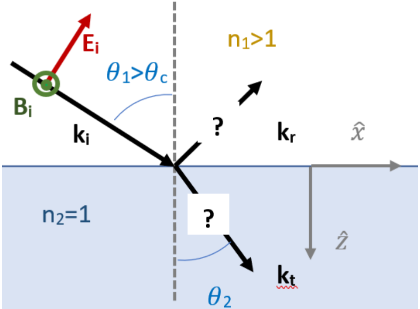
$$R \equiv \frac{E_1^-}{E_1^+} \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{R_{12} + R_{23} e^{2i\alpha_2}}{1 + R_{12} R_{23}\, e^{2i\alpha_2}}$$

$$T \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{T_{12} T_{23} e^{i\alpha_2}}{1 + R_{12} R_{23}\, e^{2i\alpha_2}}$$

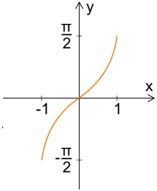
$$\text{TE} \quad \begin{cases} R_{12} \equiv \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{\bar{n}_1 - \bar{n}_2}{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} \\[2ex] T_{12} \equiv \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{2\,\bar{n}_1}{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} \end{cases} \qquad \text{TM} \quad \begin{cases} R_{12} \equiv \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \\[2ex] T_{12} \equiv \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{2\,\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \left(\dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right) \end{cases}$$

Problema 3: Reflexión total interna

La onda incidente esta linealmente polarizada con polarización **TM**.



Datos:
n_1
$\mu_1 = \mu_2 = 1$
θ_1
k_i
$n_2 = 1$

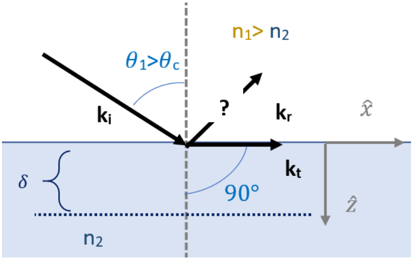


Snell: $n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2 \rightarrow \theta_2 = arcsin(\frac{n_1}{n_2} sin\theta_1)$

Si $sin\theta_1 > sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \theta_2 =$ arcoseno de algo mayor a 1

Problema 3: Reflexión total interna

En el plano real tenemos



Si $\theta_1 = \theta_c$, la onda trasmitida solo se propaga en la dirección de $\hat{x}$, es decir

$$n_1 sen\theta_c = n_2 sen90^o \rightarrow \boxed{sen\theta_c = \frac{n_2}{n_1}}$$

En $\hat{z}$ la onda es *evanescente*.

Problema 3, ítem a)

- Encontrar el vector de onda transmitida.

$$\bullet\ \cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2 = 1 \rightarrow \cos\theta_2 = \sqrt{1 - sen^2\theta_2} \qquad ①$$

$$\bullet\ n_1\, sen\,\theta_1 = 1\, sen\,\theta_2 \rightarrow \frac{sen\,\theta_1}{sen\,\theta_2} = \frac{1}{n_1}$$

$$\bullet\ \theta_1 > arcsen\left(\frac{1}{n_1}\right) \rightarrow sen\,\theta_1 > \frac{1}{n_1}$$

$$\left.\right\}\ sen\,\theta_1 > \frac{sen\,\theta_1}{sen\,\theta_2} \rightarrow sen^2\theta_2 > 1 \qquad ②$$

$$② \text{ y } ① \rightarrow \cos\theta_2 = \underbrace{\sqrt{-1}}_{i}\ \underbrace{\sqrt{sen^2\theta_2 - 1}}_{>0} \Rightarrow \cos\theta_2 \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_t = k_t\left(sen\,\theta_2\,\hat{x} + i\sqrt{sen^2\theta_2 - 1}\,\hat{z}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Snell}}}{=} k_t n_1\left(sen\,\theta_1\,\hat{x} + i\sqrt{sen^2\theta_2 - \frac{1}{n_1^2}}\,\hat{z}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} k_t = n_2\frac{\omega}{c} \rightarrow k_t = \frac{\omega}{c} \\ k_i = n_1\frac{\omega}{c} \end{array}\right\}\ \bar{k}_t = \underbrace{n_1\frac{\omega}{c}}_{k_i}\left(sen\,\theta_1\,\hat{x} + i\sqrt{sen^2\theta_2 - \frac{1}{n_1^2}}\,\hat{z}\right)$$

$$sen\,\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sen\,\theta_c = \frac{1}{n_1} \quad \Rightarrow \bar{k}_t = k_i\left(sen\,\theta_1\,\hat{x} + i\sqrt{sen^2\theta_2 - sen^2\theta_c}\,\hat{z}\right)$$

$$\boldsymbol{k_t} = k_t(sen\theta_2\hat{\boldsymbol{x}} + cos\theta_2\hat{\boldsymbol{z}}) \rightarrow \boxed{\boldsymbol{k_t} = k_i(sen\theta_1\hat{\boldsymbol{x}} + i\sqrt{sen^2\theta_1 - sen^2\theta_c}\hat{\boldsymbol{z}})}$$

Problema 3, ítem a)

$$\rightarrow \boxed{\boldsymbol{k_t} = k_i(sen\theta_1 \hat{\boldsymbol{x}} + i\kappa \hat{\boldsymbol{z}})} \qquad \kappa = \sqrt{sen^2\theta_1 - sen^2\theta_c}$$

- Escribir explícitamente la parte real y la parte imaginaria del vector de onda.

$$Re(\boldsymbol{k_t}) = k_i sen\theta_1 \hat{\boldsymbol{x}} = k_{tx}\hat{\boldsymbol{x}} \qquad Im(\boldsymbol{k_t}) = k_i\kappa\hat{\boldsymbol{z}} = -ik_{tz}\hat{\boldsymbol{z}}$$

- ¿En qué dirección se propaga la onda transmitida? ¿En qué dirección se atenúa?

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}_t(\mathbf{r}, t) \propto e^{i(\boldsymbol{k_t}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = e^{-k_i z\sqrt{sen^2\theta_1 - sen^2\theta_c}} e^{i(k_i sen\theta_1 x - \omega t)}$$

- ¿Cuál es la longitud típica de atenuación δ?

$$e^{-k_i\delta\sqrt{sen^2\theta_1 - sen^2\theta_c}} = e^{-1} \rightarrow \delta = \frac{1}{k_i\sqrt{sen^2\theta_1 - sen^2\theta_c}} \rightarrow \kappa = 1/k_i\delta$$

Problema 3, ítem b)

- Mostrar que en la zona de vacío no hay, en promedio, flujo del vector de Poynting en la dirección normal a la interfaz.

$< \boldsymbol{S_t} >= \frac{c}{8\pi} Re(\boldsymbol{E_t} \times \boldsymbol{H_t}*)$. Quiero ver que $< \boldsymbol{S_t} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} >= 0$

Propiedad útil $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

$$\langle S_T \cdot \hat{z} \rangle = \frac{c}{8\pi} Re\left\{(\bar{E}_t \times \bar{H}_t^*) \cdot \hat{z}\right\} = \frac{c}{8\pi} Re\left\{\frac{1}{k_t}\left[\bar{E}_t \times (\bar{k}_t \times \bar{E}_t)^*\right] \cdot \hat{z}\right\}$$

$$\bar{H}_t^* = \frac{\bar{B}^*}{\mu_2} = \bar{B}^* = \frac{1}{k_t}(\bar{k}_t \times \bar{E}_t)^*$$

Por la propiedad, $\bar{E}_t \times (\bar{k}_t^* \times \bar{E}_t^*) = \bar{k}_t^* (\underbrace{\bar{E}_t \cdot \bar{E}_t^*}_{|\bar{E}_t|^2}) - \bar{E}_t^* (\underbrace{\bar{E}_t \cdot \bar{k}_t^*}_{?})$ $\quad \bar{k}_t \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{k}_t^* \neq \bar{k}_t$ en general

Ec Maxwell $\rightarrow \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 0$ — onda plana $\rightarrow \bar{k} \cdot \bar{E} = 0$

- $\bar{k}_t \cdot \bar{E}_t = (k_{tx}\hat{x} + k_{tz}\hat{z}) \cdot \bar{E}_t = 0$
  $k_{tx}\hat{x} \cdot \bar{E}_t = -k_{tz}\hat{z} \cdot \bar{E}_t$

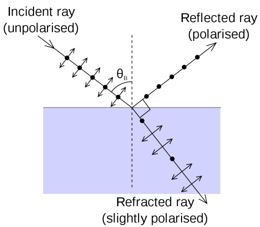
- $\bar{k}_t^* \cdot \bar{E}_t = (k_{tx}^*\hat{x} + k_{tz}^*\hat{z}) \cdot \bar{E}_t$
  $= (-k_{tz}\hat{z} + k_{tz}^*\hat{z}) \cdot \bar{E}_t$
  $= -E_{tz}\, 2i\, Im(k_{tz})$

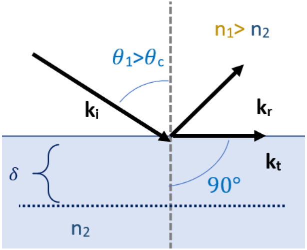
$$\Rightarrow \langle S_T \cdot \hat{z} \rangle \propto Re\left\{k_{tz}^* |\bar{E}_t|^2 + \underbrace{E_{tz}^* E_{tz}}_{|E_{tz}|^2}\, 2i\, Im(k_{tz})\right\} = Re\{k_{tz}^*\} |\bar{E}_t|^2$$

$$\bar{K}_{tz}^* = -iK\hat{z} \Rightarrow \langle S_T \cdot \hat{z} \rangle = 0$$

Problema 3, ítem c)

- Si la onda en la situación anterior incidiera además con el ángulo de Brewster, no habría tampoco onda reflejada. ¿Es esto posible?

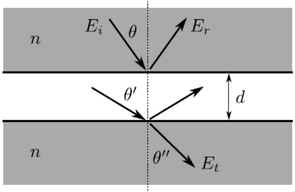




$\boxed{tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}} \rightarrow tan\theta_1 = 1/n_1$. Pero por otro lado $\theta_1 > \theta_c = arcsen(1/n_1)$

$\rightarrow sen\theta_1 > 1/n_1 = tan\theta_1 \rightarrow sen\theta_1 > \frac{sen\theta_1}{cos\theta_1} \rightarrow cos\theta_1 > 1 \rightarrow$ <u>No es posible</u>.

Problema 4: Reflexión total interna frustrada



La onda incidente es **TE**

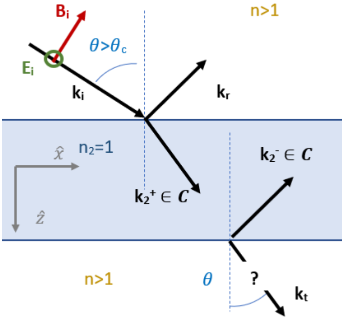
$\theta > \theta_c \rightarrow$ la onda en vacío es evanescente.

¿Qué es lo que llega al último medio?

- Ítem a) ¿Cuánto vale θ"? $n sen\theta = sen\theta'$, $\quad sen\theta' = sen\theta'' \rightarrow \theta'' = \theta$
- Ítem b) Hallar la amplitud de la onda reflejada en el primer medio y la de la onda transmitida en el tercero.

Nos pide $R = \frac{E_r}{E_i} \equiv \frac{E_1^-}{E_1^+}$ y $T = \frac{E_t}{E_i} \equiv \frac{\tilde{E_3^+}}{E_1^+}$

Problema 4: Ítem b)



Como en el problema 3,

$cos\theta' = i\sqrt{n^2 sen\theta - 1} \rightarrow$

$$\boldsymbol{k}_2^{\pm} = k_i(sen\theta\hat{\boldsymbol{x}} \pm i\kappa\hat{\boldsymbol{z}})$$

donde $k_i = n\frac{\omega}{c}$

Las ecuaciones son las mismas que las del problema 2)

- $E_2^+ + E_2^- = E_1^+ + E_1^- \equiv E_i + E_r$
- $i\kappa(E_2^+ - E_2^-) = ncos\theta(E_1^+ + E_1^-) \equiv ncos\theta(E_i + E_r)$
- $\tilde{E_3^+} \equiv \tilde{E}_t = E_2^+ e^{i\alpha_2} + E_2^- e^{-i\alpha_2}$
- $i\kappa(E_2^+ e^{i\alpha_2} - E_2^- e^{-i\alpha_2}) = ncos\theta''\tilde{E_3^+} \equiv ncos\theta\tilde{E}_t$

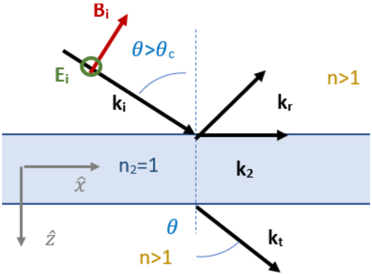
$\tilde{E}_t = E_t e^{i\alpha_3} \quad \alpha_2 = k_2 cos\theta' d = ik_2\kappa d \quad \alpha_3 = kcos\theta d \quad k = n\frac{\omega}{c}$

Problema 4. Ítem b)

Reemplazando en los resultados del problema 2, en este caso queda:

$$\tilde{n}_1 = \tilde{n}_3 = n cos\theta \quad \tilde{n}_2 = cos\theta'$$
$$\rightarrow R_{12} = -R_{23} = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \quad T_{12} = \frac{2\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \quad T_{23} = \frac{2\tilde{n}_2}{\tilde{n}_2 + \tilde{n}_1}$$
$$\rightarrow \boxed{R = \frac{R_{12}(1 - e^{2i\alpha_2})}{1 - R_{12}^2 e^{2i\alpha_2}} \quad T = \frac{T_{23} T_{12} e^{i\alpha_2}}{1 - R_{12}^2 e^{2i\alpha_2}}}$$

En el plano real tenemos



Problema 4. Ítem c)

- Ver que para d = 0 y d $\to \infty$ se recuperan los resultados previsibles

$$\bullet\ \boxed{d\to 0} \Rightarrow \alpha_2 = i k k_2 d \to 0, \quad \Rightarrow R \to \frac{R_{12}(1-e^0)}{1-R_{12}^2 e^0} = 0$$

$$T \to \frac{T_{23}T_{12}e^0}{1-R_{12}^2 e^0} = \frac{T_{23}T_{12}}{1-R_{12}^2} = \frac{1}{1-R_{12}^2}\left(\frac{2\tilde n_1}{\tilde n_1+\tilde n_2}\cdot\frac{2\tilde n_2}{\tilde n_1+\tilde n_2}\right) = \frac{1}{1-R_{12}^2}\,\frac{4\tilde n_1\tilde n_2}{(\tilde n_1+\tilde n_2)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{\tilde n_1-\tilde n_2}{\tilde n_1+\tilde n_2}\right)^2}\,\frac{4\tilde n_1\tilde n_2}{(\tilde n_1+\tilde n_2)^2} = \frac{4\tilde n_1\tilde n_2}{(\tilde n_1+\tilde n_2)^2-(\tilde n_1-\tilde n_2)^2} = \frac{4\tilde n_1\tilde n_2}{\tilde n_1^2+2\tilde n_1\tilde n_2+\tilde n_2^2-(\tilde n_1^2-2\tilde n_1\tilde n_2+\tilde n_2^2)}$$

$$\Rightarrow T \to \frac{4\tilde n_1\tilde n_2}{4\tilde n_1\tilde n_2} = 1$$

$$\bullet\ \boxed{d\to\infty} \quad \text{OBS: } i\alpha_2 = i\,i\,k k_2 d = -k k_2 d \Rightarrow e^{2i\alpha_2} \xrightarrow[d\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow R \to \frac{(1-0)R_{12}}{1-R_{12}^2\cdot 0} = R_{12}, \quad T \to \frac{T_{23}T_{12}\cdot 0}{1-R_{12}^2\cdot 0} = 0$$

- ¿Cuál es la escala de longitud con la que debe compararse d para saber si el problema puede aproximarse por alguno de esos dos casos?

$$\delta = \frac{1}{k\sqrt{sen^2\theta - sen^2\theta_c}} \propto \lambda \qquad d \gg \delta \text{ transmisión despreciable}$$

$$d \ll \delta \text{ casi todo se transmite}$$

Problema 4. Ítem d) y e)

- Ítem d) Diga cómo tiende la amplitud de la onda transmitida a los valores límite del ítem anterior.

$$T \propto e^{-\frac{1}{n}\frac{d}{\delta}}$$

- Encuentre en cada caso el valor medio de la componente normal del vector de Poynting en el tercer medio.

En el 3er medio:

$$< \boldsymbol{S_t} > \propto |\boldsymbol{E_t}|^2 Re(\boldsymbol{k_t}*) \qquad E_t = E_i T \qquad k_t = k(sen\theta \hat{\boldsymbol{x}} + cos\theta \hat{\boldsymbol{z}}) \;\; \epsilon R$$

Cuando $d \to \infty$, consideramos el 2do medio, y tenemos lo del P3)