G7.P9)

cilindro infinito cargado en volumen (uniforme).

Recordar de la guía 1, problema 1:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 2\pi \rho r \hat{r} & \text{si } r \leq a \\ 2\pi \rho \dfrac{a^2}{r} \hat{r} & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

Este $\vec{E}(\vec{r})$ será el campo eléctrico en el sistema en reposo S. Queremos los campos que verá un observador en S' moviéndose paralelo al hilo $\vec{v} = v\hat{z}$.

Existen 2 formas de resolverlo, transformando las fuentes y calculando los campos ó transformando los campos.

1) Transformando los campos directamente:

$$\left.\begin{aligned} E_{/\!/}' &= E_{/\!/} \\ \vec{E}_{\perp}' &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} E_{/\!/}' &= 0 \\ \vec{E}_{\perp}' &= \gamma \vec{E}_{\perp} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}'(\vec{r}') = \begin{cases} 2\pi \rho \gamma r \hat{r} & \text{si } r \leq a \\ 2\pi \rho \gamma \dfrac{a^2}{r} \hat{r} & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

ojo! Necesito transformar también la posición:

r y $\hat{r} \longrightarrow r'$ y $\hat{r}'$

$$\left.\begin{aligned} z' &= \gamma(z - vt) \\ x' &= x \\ y' &= y \end{aligned}\right\} \quad r' = r \wedge \phi' = \phi$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{E}'(\vec{r}') = \begin{cases} 2\pi \rho \gamma r' \hat{r}' & \text{si } r' \leq a \\ 2\pi \rho \gamma \dfrac{a^2}{r'} \hat{r}' & \text{si } r' \geq a \end{cases}}$$

ve el campo de un cilindro uniforme con densidad $\gamma\rho$

veamos si en S' se observa campo magnético:

$$\left.\begin{aligned} B_{/\!/}' &= B_{/\!/} \\ \vec{B}_{\perp}' &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} B_{/\!/}' &= 0 \\ \vec{B}_{\perp}' &= -\gamma \vec{\beta} \times \vec{E} = -\gamma \beta E_r \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{B}'(\vec{r}') = \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{c} (\gamma \beta c \rho) r' \hat{\phi}' & \text{si } r' \leq a \\ -\dfrac{2\pi}{c} (\gamma \beta c \rho) \dfrac{a^2}{r'} \hat{\phi}' & \text{si } r' \geq a \end{cases}}$$

ve el campo de un cilindro con corriente $-\gamma\beta c\rho$ unif.

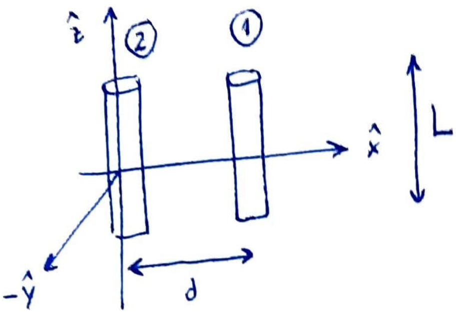
2) Transformando los fuentes y calculando el campo electromagnético:

En S: $J^\mu = (c\rho, \vec{0})$ ← es un cuadrivector (contravariante)

En S': $J'^\mu = L^\mu{}_\nu J^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c\rho \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma\beta c\rho \end{pmatrix}$

A partir de J'^μ se hallan los campos $\vec{E}(\vec{r}')$ y $\vec{B}(\vec{r}')$ hallados.

G7.10)



- $\vec{F}_{12} = \int_0^L \oint \rho_1 \vec{E}_{12}\, ds\, dl$ fuerza que siente 1 debido a 2.
- Asumimos que $d \gg a$ ⇒ E_{12} es uniforme en la barra ($r \sim a$)

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \begin{cases} 2\pi\rho_2 r\,\hat{r} & \text{si } r \le a \\ 2\pi\rho_2 \frac{a^2}{r}\,\hat{r} & \text{si } r \ge a \end{cases}$$ En S (por el problema anterior)

Para integrar más fácil asumimos que $\vec{E}_2(\vec{r}_1) = \frac{2\pi\rho a^2}{d}\hat{x}$ ($d \gg a$)

⇒ $\vec{F}_{12} = \int \frac{2\pi}{d}\rho\rho a^2\, dV \hat{x} = \frac{2\pi}{d} a^2 \rho^2 L \pi a^2 \hat{x}$ ⇒ $\frac{F_{12}}{L} = 2\frac{(\pi a^2 \rho)^2}{d}$

¿Qué pasa en S'? ⇒ tenemos $\vec{F}'_{12} = \vec{F}'_{\text{eléctrico}} + \vec{F}'_{\text{magnético}}$

$\vec{F}'_{\text{eléctrica}} = 2\frac{(\pi a^2 \rho\gamma)^2}{d}\hat{x}$ (lo mismo que antes pero con densidad $\gamma\rho$)

$\vec{F}_{\text{magnético}} = \frac{1}{c}\int_V \vec{J}'_1 \times \vec{B}'_2(\vec{r}_1)$ $\begin{cases} \vec{J}'_1 = -c\beta\gamma\rho\,\hat{z} \\ \vec{B}'_2(\vec{r}'_1) \simeq -\frac{2\pi}{c}(\gamma\beta c\rho)\frac{a^2}{d}\hat{y} \end{cases}$ (uso la expresión del prob. anterior)

⇒ $\vec{F}_{mag} = -\frac{2}{d}(\pi a^2 \gamma\beta\rho)^2 L' \hat{x}$ ∴ $F'_{12} = \frac{2}{d}(\pi a^2 \rho\gamma)^2 (1-\beta^2) L' \hat{x}$

⇒ $\frac{F'_{12}}{L'} = \frac{2}{d}(\pi a^2 \rho)^2$ ∴ $\boxed{\frac{F_{12}}{L} = \frac{F'_{12}}{L'}}$

Introducimos el objeto : $f^{\mu} = \frac{1}{c} F^{\mu}{}_{\nu} J^{\nu}$ generalización covariante de la fza de Lorentz.

cuadrivector contravariante

(aca covariante refiere a que no cambia ante transf. de Lorentz)

$$f^{\mu} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\rho \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x E_x + J_y E_y + J_z E_z \\ \rho E_x + B_z J_y - B_y J_z \\ \rho E_y - B_z J_x + B_x J_z \\ \rho E_z + B_y J_x - B_x J_y \end{pmatrix}$$

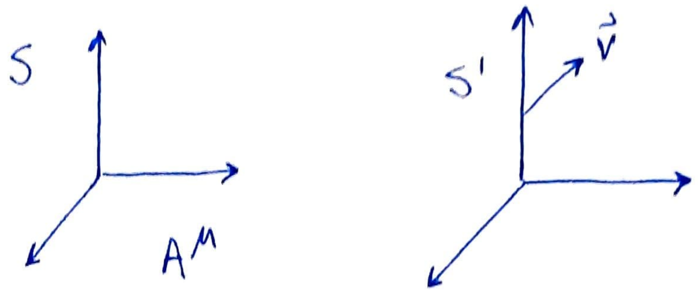
$$\Rightarrow \quad \boxed{f^{\mu} = \left(\frac{\vec{J}\cdot\vec{E}}{c} \; ; \; \frac{\rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}}{c} \right)}$$

Otra forma de ver que la fuerza es la misma sería usando este cuadrivector:

en S : $f^{\mu} = \left(0, \frac{2\pi^2\rho^2 a^2}{d}, 0, 0\right)$

en S' : $$f'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} f^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\pi^2 a^2\rho^2}{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\pi^2 a^2\rho^2}{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E7.P11) Un dipolo magnético en el origen de S' / $\begin{cases} \Phi' = 0 \\ \vec{A}' = \dfrac{\vec{m}\times\vec{r}'}{r'^3} \end{cases}$



$$A'^\mu = (0, \vec{A}) = \left(0, \frac{\vec{m}\times\vec{r}'}{r'^3}\right)$$

cuadrivector contravariante

(a) Hallar los potenciales en S Φ y $\vec{A}$, a primer orden en β.

Sabemos que A^μ transforma como el cuadrivector posición x^μ:

$$\left.\begin{aligned} \Phi' &= \gamma(\Phi - \vec{\beta}\cdot\vec{A}) \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{A})\vec{\beta} - \gamma\Phi\vec{\beta} \end{aligned}\right\} \text{ Para transformar de S a S'!}$$

Para transformar de S' a S: $\vec{\beta} \to -\vec{\beta}$ y primado por no primado

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \gamma(\Phi' + \vec{\beta}\cdot\vec{A}') \\ \vec{A} &= \vec{A}' + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{A}')\vec{\beta} + \gamma\Phi'\vec{\beta} \end{aligned}\right\} \text{ Para transformar de S' a S!}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \Phi &= \gamma\vec{\beta}\cdot\vec{A}' \\ \vec{A} &= \vec{A}' + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{A}')\vec{\beta} \end{aligned}\right\} \quad A^\mu = (\Phi, \vec{A})$$

cuadrivector contravariante

Tambien debemos transformar la posición $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{r}')\vec{\beta} + \gamma ct'\vec{\beta} \quad ; \quad ct = \gamma(ct' + \vec{\beta}\cdot\vec{r}')$$

A primer orden en $\beta \iff \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots \simeq 1$

Luego, a primer orden en β:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}t \Rightarrow \begin{cases} \Phi = \vec{\beta} \cdot \dfrac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{v}t)}{|\vec{r} - \vec{v}t|^3} \\ \vec{A} = \dfrac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{v}t)}{|\vec{r} - \vec{v}t|^3} \end{cases}$$

recordar que: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi = \dfrac{(\vec{\beta} \times \vec{m}) \cdot \vec{R}}{R^3} \\ \vec{A} = \dfrac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3} \end{cases}$$

donde: $\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t$

b) calcular $\vec{E}$ y $\vec{B}$

Usamos el tensor electromagnético: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

$$E_i = F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$B_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk}$$

para el campo eléctrico: $\partial^0 A^i = \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial}{\partial t} \left(\dfrac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3} \right) = \cdots = - \dfrac{\vec{m} \times [3(\vec{n} \cdot \vec{\beta})\vec{n} - \vec{\beta}]}{R^3}$

$$\partial^i A^0 = -\vec{\nabla} \Phi = \cdots = \frac{3\vec{n}(\vec{p} \cdot \vec{n}) - \vec{p}}{R^3}$$

con $\vec{p} = \vec{\beta} \times \vec{m}$ $\wedge$ $\vec{n} = \vec{R}/R$

para el campo magnético: $\vec{A} = \dfrac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3} \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{3\vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{R^3} \\ \vec{E} &= \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{R^3} - \frac{\vec{m} \times [3(\vec{n} \cdot \vec{\beta})\vec{n} - \vec{\beta}]}{R^3} \end{aligned}}$$