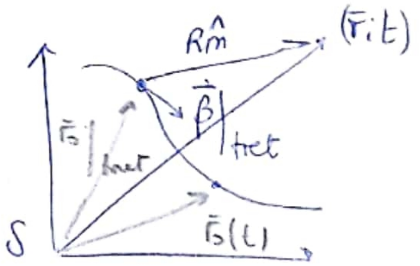
Potenciales de Lienard-Wiechert para una carga puntual.

- $\varphi(\vec{r},t) = \dfrac{q}{R(1-\hat{n}\cdot\vec{\beta})}\Big|_{t\,ret}$; • $R = |\vec{r}-\vec{r}_0(t')| = |\vec{R}|$
  • $\hat{n} = \vec{R}/R$
- $\vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{q}{R(1-\hat{n}\cdot\vec{\beta})}\cdot\vec{\beta}\Big|_{t\,ret}$ • $\vec{\beta} = \vec{v}(t')/c$

- $t_{ret} = t'$ / $c(t-t') = R(t')$; dados $\vec{r}$ y t
  $(t > t')$ con $\vec{r}_0(t')$ posición de la carga.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{A} \\ \vec{B} = \hat{n}\big|_{t\,ret}\times\vec{E} \quad (= \vec{\nabla}\times\vec{A}) \end{cases}$$



- $\vec{E}(\vec{r},t) = \overbrace{\dfrac{q(\hat{n}-\vec{\beta})}{\gamma^2 R^2(1-\hat{n}\vec{\beta})^3}\Big|_{t\,ret}}^{①} +$

$$\frac{q}{c}\,\frac{\hat{n}\times[(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})^3\,R}\Big|_{t\,ret}$$ campo de aceleración/radiación

①: campo de velocidades: como el estático $\sim 1/R^2 \Rightarrow$ no provee flujo de energía al ∞.

por unidad de área.

$\Rightarrow$ Flujo de Energía instantáneo: vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}_r\times\vec{B}_r) = \frac{c}{4\pi}\vec{E}_r\times(\hat{n}\times\vec{E}_r) = \frac{c}{4\pi}|E_r|^2\,\hat{n}$$

Escaneado con CamScanner

$\boxed{(\vec{S}\cdot\hat{m})}\Big|_{t_{ret}}$: Energía por unidad de área por unidad de tiempo, detectada en el punto de observación $\vec{r}$ a un tiempo t, de radiación emitida por la carga q en un tiempo $t' = t - \frac{R(t')}{c}$

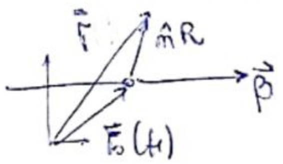
$\Rightarrow$ En un un ~~período~~ intervalo entre $t' = t_1$; $t' = t_2$: Energía emitida

$$\mathcal{U} = \int_{t = t_1 + R(t_1)/c}^{t = t_2 + R(t_2)/c} (\vec{S}\cdot\hat{m})\Big|_{t_{ret}} \cdot dt \quad : \text{cambio } t \to t(t'), \quad dt \to \frac{dt}{dt'}dt'$$

$$= \int_{t'=t_1}^{t'=t_2} \underbrace{(\vec{S}\cdot\hat{m})\cdot\frac{dt}{dt'}}\cdot dt'$$

Es la cantidad que nos interesa: Potencia irradiada, por unidad de área (instantánea) en términos del tiempo de emisión de la carga.

$\therefore$ $dP(t') = \left(\vec{S}\,\frac{dt}{dt'}\right) d\vec{A}$; con $d\vec{A} = R^2 d\Omega\,\hat{m}$



$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega}(t') \equiv \frac{(dE/dt')}{d\Omega} = R^2\cdot\vec{S}\cdot\hat{m}\cdot(1-\hat{m}\vec{\beta}) :$$ Distribución angular de la potencia irradiada.

C.A:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_0(t')| = c(t - t') \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial t} = c\left(1 - \frac{dt'}{dt}\right) = \frac{\partial R}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}\left(+\frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t'}\right)\cdot\frac{dt'}{\partial t} = -\hat{m}\vec{v}\cdot\frac{dt'}{dt} \Rightarrow \frac{dt'}{dt}\left(1 - \hat{m}\frac{\vec{v}}{c}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{dt/dt' = (1 - \hat{m}\vec{\beta})}$$

Escaneado con CamScanner

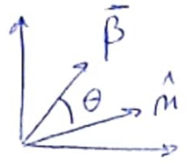
$$\boxed{\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \cdot \frac{\left[\hat{n} \times \{(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}\right]^2}{(1 - \hat{n}\vec{\beta})^5}}$$

Si $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}} \Rightarrow$

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \cdot \frac{\left[\hat{n} \times \hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}\right]^2}{(1 - \hat{n}\vec{\beta})^5}$$

Si $|\vec{\beta}| \simeq 0$: caso no relativista $\Rightarrow$ $(1 - \hat{n}\vec{\beta} \simeq 1)$

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{t'} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \cdot |\ddot{\vec{r}}|^2 \sin^2\theta \quad ;$$



simetría de revolución en ϕ.

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} \cdot d\Omega \propto \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} s^2\theta \cdot s\theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{8}{3}\pi$$

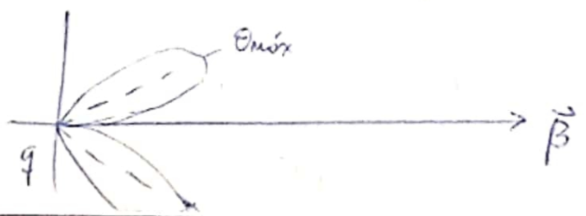
$$\left(\begin{array}{l} \cos\theta = x \\ -\operatorname{sen}\theta \, d\theta = dx \end{array}\right)$$

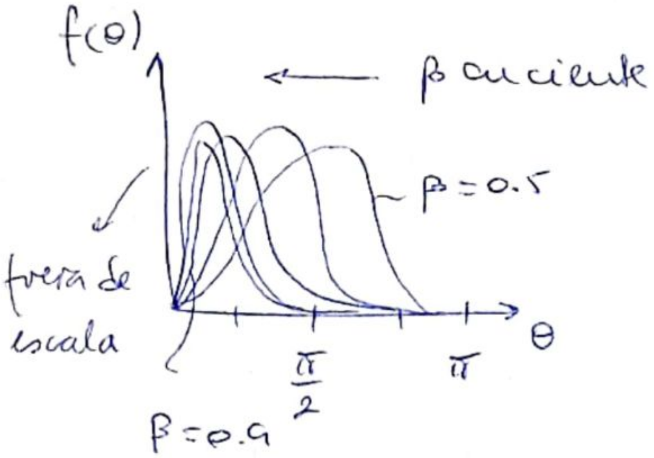
$$\boxed{P = \frac{2}{3} \frac{q^2 |\ddot{\vec{r}}|^2}{c^3}}$$: Fórmula de Larmor

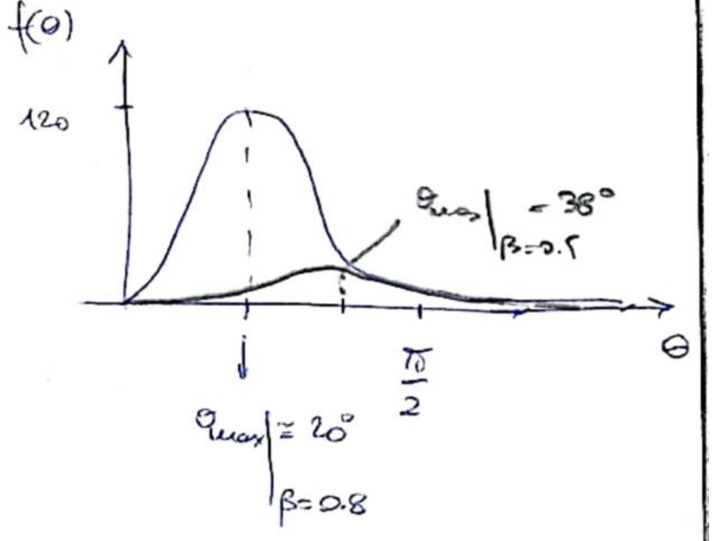
Si no : caso relativista : $\displaystyle \frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \frac{\sin^2\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^5} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} f(\theta)$

cambio $\cos\theta = x \Rightarrow f(x) = \dfrac{1 - x^2}{(1 - \beta x)^5}$

$$\Rightarrow \quad \theta_{máx} = \cos^{-1}\left[\frac{1}{3\beta}\left(\sqrt{1 - 15\beta} - 1\right)\right] \xrightarrow[(\beta \to 1)]{} 1$$





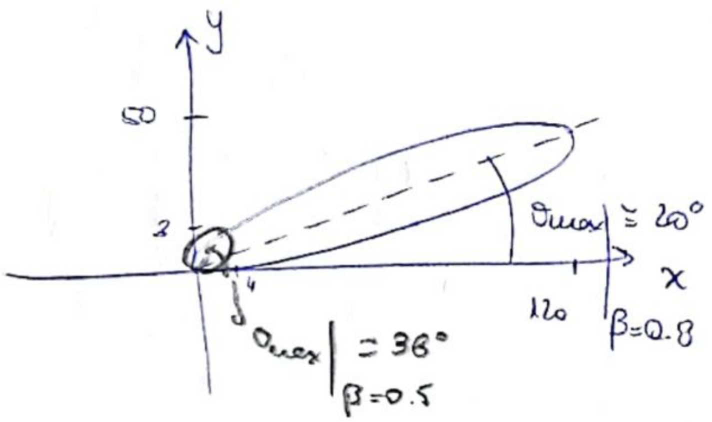


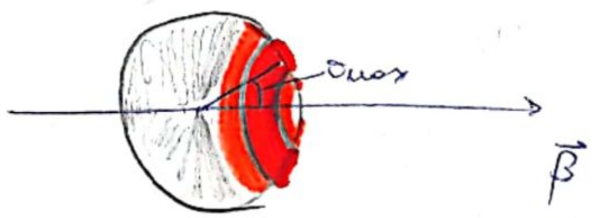
Si grafico en coordenadas polares:

$$f(\theta) = r = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

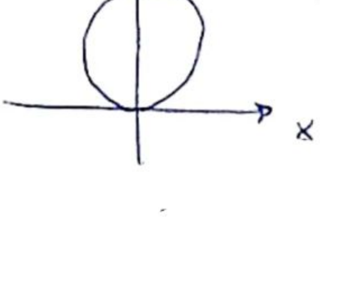
$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

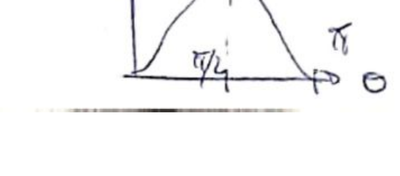
$\Rightarrow$





$$f(\theta) = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sin^2\theta = \frac{y^2}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

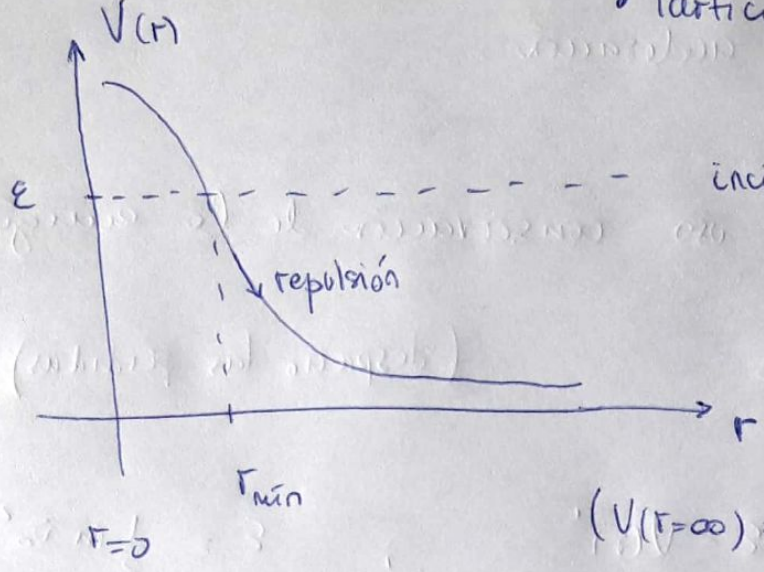




Escaneado con CamScanner

Guía 8: Radiación

P.1)



• Partícula de masa m

carga $q = Z.e$

incide con $\underbrace{\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v_0^2}_{\text{energía cinética inicial desde infinito}}$

$(V(r=\infty) = 0)$

Potencial repulsivo en el origen, Partícula No-Relativista $\left(\frac{v_0}{c} \simeq 0\right)$

a) Hallar energía radiada por la partícula.

Uso potencia instantánea emitida (no-relativista):

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \ddot{r}^2 \quad \text{Larmor (no-relativista)}$$

$\Rightarrow$

Energía total radiada:

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot P(t) \quad \text{"ida y vuelta"}$$

$$= \int_{ida} dt \cdot P(t) + \int_{vuelta} dt \, P(t)$$

$$= 2 \int_{ida} dt \cdot P(t)$$

$$= 2 \int_{r_{mín}}^{\infty} \frac{dr}{|\dot{r}|} \cdot P(r)$$

Escaneado con CamScanner

Necesito: $\dot{r}(r)$ y $\ddot{r}(r)$

$$\ddot{r} = -\frac{1}{m} \cdot V'(r) \quad : \text{aceleración}$$

Para la velocidad $\dot{r}$ uso conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r) = \mathcal{E} \qquad \text{(desprecio las pérdidas)}$$

$$\Rightarrow \quad |\dot{r}| = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\mathcal{E} - V(r)} \quad ; \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

(energía inicial)

$$\therefore \quad \Delta W = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{q^2}{c^3} \frac{1}{m^2} \int_{r_{min}}^{\infty} dr \cdot \frac{[V'(r)]^2}{\sqrt{V(r_{min}) - V(r)}} \quad ; \quad (q = Z.e)$$

donde $\underbrace{V(r_{min})}_{\text{dist. mín. acercamiento al origen}} = \mathcal{E} = \frac{1}{2} m v_0^2$

b) Interacción Coulombiana: $V(r) = Z Z' e^2 / r$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{calculo de la integral}} \quad \Delta W = \frac{8}{45} \cdot \frac{Z . m . v_0^5}{Z' . c^3} \quad ; \quad v_0 : \text{velocidad incidente en infinito}$$

$$= \underbrace{\frac{16}{45} \cdot \left(\frac{Z}{Z'}\right) \left(\frac{v_0}{c}\right)^3}_{\text{fracción de energía radiada}} \cdot \mathcal{E}$$

Si $v_0 \ll c$ (caso no-relativista) vemos que $\Delta W \ll \mathcal{E}$.

Escaneado con CamScanner

c) Considerar $\underbrace{\text{positrón}}_{m,\, v_0}$ incidiendo sobre un $\underbrace{\text{protón}}_{M \simeq 2000\, m \gg m}$

$(Z = Z')$

•) Despreciando movimiento del protón, estimar velocidad final del positrón : v_f

$$\frac{1}{2} m \, v_f^2 = \mathcal{E} - \Delta W \quad ; \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} m v_0^2 , \; \Delta W = \frac{16}{45}\left(\frac{v_0}{c}\right)^3 \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{\mathcal{E} - \Delta W}$$

$$= \sqrt{2/m} \sqrt{\mathcal{E}} \; (1 - x)^{1/2} \quad ; \quad x = \frac{\Delta W}{\mathcal{E}}$$

$$\simeq v_0 \left(1 - \frac{\Delta W}{2\mathcal{E}} \right) \; : \text{ pérdida de energía}$$

variación relativa : $\dfrac{v_0 - v_f}{v_0} \simeq \dfrac{\Delta W}{2\mathcal{E}} = \dfrac{8}{45} \cdot \left(\dfrac{v_0}{c}\right)^3$

••) Despreciando radiación, considerando masa finita del protón estimar veloc. final del positrón (v_f)

Conservación Energía : $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} M v^2$ ↳ vel. protón (final)

impulso : $m \cdot v_0 = -m \cdot v_f + M \cdot v$

$$\Rightarrow \quad v_f = \frac{M - m}{M + m} \cdot v_0 \simeq v_0 \left(1 - \frac{2m}{M} \right)$$

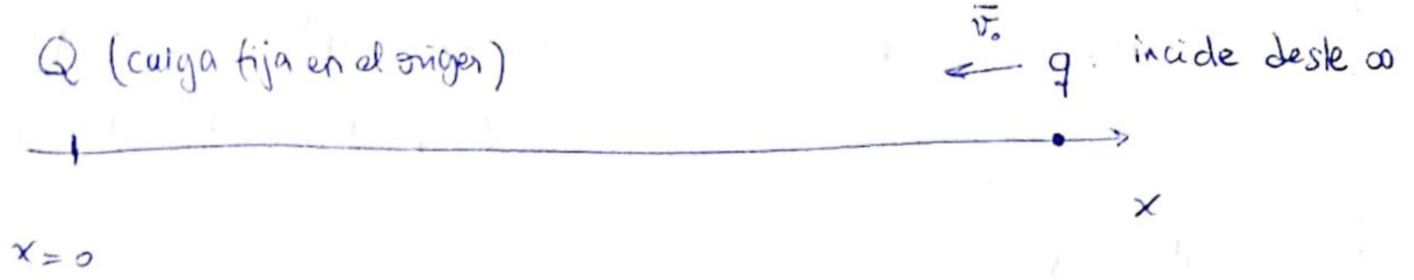
variación relativa : $\dfrac{v_0 - v_f}{v_0} \simeq \dfrac{2m}{M} \simeq 10^{-3}$ ∴ El efecto de la masa finita domina sobre pérdidas por radiación para $v_0 \lesssim (0{,}18) \cdot c \simeq c/5$.

Escaneado con CamScanner

P2) Versión Relativista del problema 1:

Partícula (m) con: $\gamma_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$; $\vec{\beta}_0 = \dfrac{\vec{v}_0}{c}$

(y carga q)



a) Demostrar que para una partícula de masa m y carga q:

$$m \cdot \gamma \cdot \dot{\vec{v}} = q \left[\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} - (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{\beta} \right]$$

donde $\gamma = \gamma(\vec{v}) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\vec{v}/c)^2}}$; $\dot{\vec{v}} \equiv \dfrac{d}{dt}\vec{v}$

$\vec{E}$, $\vec{B}$ campos eléctrico y magnético externos

Escaneado con CamScanner

Usamos : $\frac{d}{d\tau} p^\mu = K^\mu$; 4-fuerza sobre una partícula

$p^\mu = m \cdot u^\mu$; $u^\mu = \gamma (c ; \vec{v})$

$K^\mu = \gamma \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} ; \vec{F} \right)$; $\vec{F}$: fuerzas externas (en el sistema inercial)

$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B})$: Si se aplican campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ sobre la partícula

---

Componente $\mu = 0$:

$(p^\mu \equiv (p^0 ; \vec{p}))$

$$\frac{d}{d\tau} p^0 = K^0$$

$$\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma} \cdot \frac{d}{dt} (m \gamma c) = \gamma \cdot \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{m c \dot{\gamma} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}} \quad (1)$$

Componentes $\mu = i \ (= 1, 2, 3)$:

$(\vec{p} \equiv m \gamma \vec{v})$

$$\frac{d}{d\tau} \vec{p} = \gamma \cdot \vec{F}$$

$$\cancel{\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma =}} \cdot \dot{\vec{p}} = \cancel{\gamma} \cdot \vec{F}$$

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \Rightarrow m \dot{\gamma} \vec{v} + m \gamma \dot{\vec{v}} = \vec{F}$$

$$\therefore \ m \gamma \dot{\vec{v}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso } (1)}}{=} \vec{F} - \left(\vec{F} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{c}$$

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow$ a) $\quad m\gamma \dot{\vec{v}} = q\left[\vec{E} + \vec{\beta}\times\vec{B} - (\vec{\beta}\cdot\vec{E})\cdot\vec{\beta}\right]$ ✓

Para nuestro problema : $\quad (\vec{v} = \underbrace{\dot{x}}_{=v}\cdot\hat{x})$

$$\begin{cases} \vec{B} = 0 \\ \vec{E} = \dfrac{Q}{r^2}\cdot\hat{r} \end{cases} \longrightarrow \quad \vec{E} = \overbrace{\dfrac{Q}{x^2}}^{E}\cdot\hat{x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m\cdot\gamma\cdot\dot{v} = q\left[E - \beta^2\cdot E\right] = \frac{qE}{\gamma^2}} \qquad (2)$$

Volvemos a lo que nos interesa.

queremos la energía radiada por la partícula (m, q) relativista :

$$\Delta W = 2\int_{0\,:\,\text{retorno}}^{\infty} dt\cdot P(t)$$

$\downarrow$

(viaje de ida y vuelta)

donde $\quad P(t) = \int \overbrace{\frac{dP}{d\Omega}}^{\text{relativista}}\, d\Omega \quad ; \quad d\Omega = d\varphi\cdot d(\overbrace{\cos\theta}^{x})$

(caso $\vec{\beta}\,//\,\dot{\vec{\beta}}$)

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} dx \quad \frac{q^2\cdot\dot{v}^2}{4\pi c^3}\;\frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{q^2}{c^3}\cdot\dot{v}^2\,\gamma^6 \; :$$

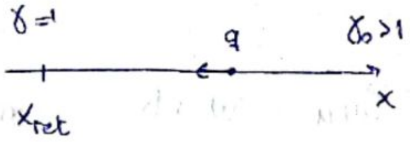
Larmor relativista (caso $\vec{\beta}\,//\,\dot{\vec{\beta}}$)

Escaneado con CamScanner

[Obs: Para un caso gral. $P(t) = \frac{2}{3}\frac{q^2 \gamma^6}{c}\left[\dot{\vec\beta}^2 - (\vec\beta \times \dot{\vec\beta})^2\right]$]
(Larmor Relativista)

γ_0 : valor inicial

$$\Rightarrow \quad \Delta W = 2 \int_1^{\gamma_0} \frac{d\gamma}{|\dot\gamma|} \cdot P(\gamma)$$



(Obs.: $\Delta W_{\text{ida y vuelta}}$ es una estimación bajo hipótesis $\gamma_f \simeq \gamma_0$)

Necesito: $\left[\dot\gamma \underset{(1)}{=} \frac{\vec F \cdot \vec v}{mc^2} = \frac{qE}{mc}\,\beta \right.$: en función de γ

$$\boxed{\beta(\gamma) =} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$$

$$E = Q/x^2 = E(\gamma) :$$

ca: uso (2): $\left[\dot v = \frac{qE}{m\gamma^3} \right.$

$$\Rightarrow \left(\frac{m}{q}\right) \gamma^3 \cdot \frac{dv}{dt}\, dx = \frac{Q}{x^2} \cdot dx$$

$$\frac{m}{q} \underbrace{\int_{v_0}^{v} \gamma^3 \cdot v \cdot dv}_{c^2(\gamma - \gamma_0)} = Q \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{x^2} = -\frac{Q}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{qE(\gamma)} = q\frac{Q}{x^2} = \frac{m^2}{qQ} \cdot c^4 (\gamma_0 - \gamma)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left[\dot v(\gamma) = \frac{q\,E(\gamma)}{m\gamma^3} \right.$$

Escaneado con CamScanner

$$\therefore \quad \Delta W = 2 \int_1^{\gamma_0} d\gamma \cdot \frac{mc}{qE|\beta|} \left[\frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \gamma^2 \left(\frac{qE}{m\gamma^3} \right)^2 \right]$$

$$\boxed{\Delta W = \frac{4}{3} \left(\frac{q}{Q} \right) mc^2 \int_1^{\gamma_0} d\gamma \, \frac{\gamma (\gamma_0 - \gamma)^2}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}}$$

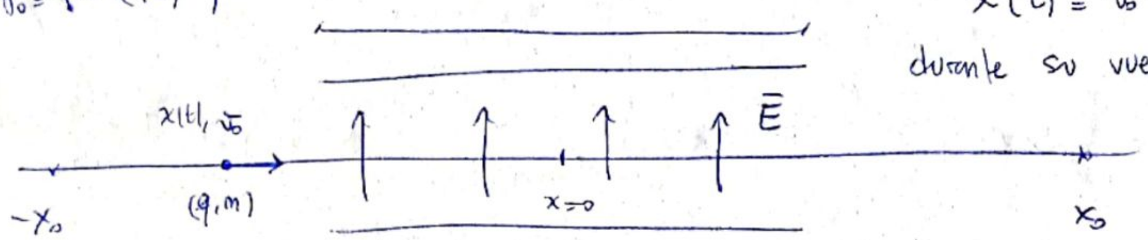
$$\left(\Delta W_{ida} = \frac{\Delta W}{2} \right)$$

P3) [Algunas ideas, para que lo terminen ustedes] : A $t=0$ la partícula entra al capacitor con trayectoria aproximada:

$$x(t) = v_0 t - \frac{\ell}{2}$$

durante su vuelo.

$\gamma_0 = \left(1 - (v_0/c)^2\right)^{-1/2}$



$\vec{v} = v_0 \hat{x} + \delta\vec{v}$; $\delta\vec{v}$: desviación por campo E en las placas : $\delta v \ll v_0$: despreciable

a) $\Delta W = \int dt \, . \, P(t) \simeq P_0 \, . \, \Delta t_0$; $\Delta t_0 = \ell / v_0$

usar $P(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2 \gamma^6}{c} \left[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right] \simeq \frac{2}{3} \frac{q^4 \gamma_0^2}{m^2 c^3} \, . \, E^2 \equiv P_0$

Larmor Relativista

(orden cero)

uso P2) a): $\boxed{\dot{v} \simeq \frac{q}{m\gamma_0} E}$ $\quad (\bar{E} \cdot \bar{v} \simeq 0)$

b) $\vec{E}_{rad}\Big|_{(\vec{r},t)} = \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{n} \times \{ (\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \}}{R \, (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right]\Bigg|_{t_{ret}}$

↳ tiempo de la medición

↳ tiempo de la emisión

Escaneado con CamScanner

$$\begin{cases} \bar{r} = x_0 \hat{x} \quad ; \quad \hat{n} = \hat{x} \\ 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta} \cong 1 - \beta_0 \end{cases}$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \vec{E}_{rad}(x_0, t) = - \frac{q^2 E}{m c^2 (1-\beta_0)} \sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}} \cdot \hat{y} \cdot \frac{1}{R_{ret}}$$

$$\bullet\ R_{ret}(x_0) \equiv R\Big|_{t_{ret}} = \underbrace{x_0}_{\substack{\text{posición de} \\ \text{la medición}}} - \overbrace{x(t')}^{\text{posición de emisión en tiempo retardado } t'}$$

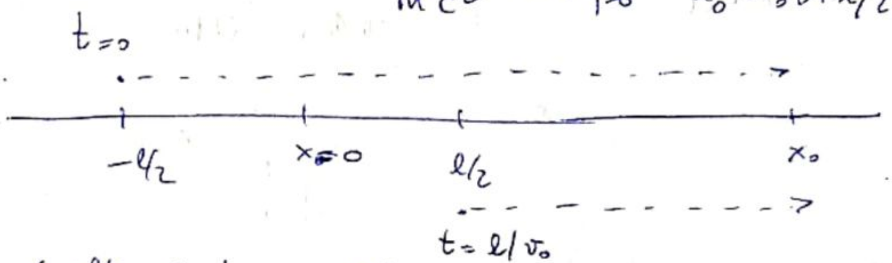
$$= x_0 - \underbrace{x(t')} = c\,(t - t') \Rightarrow \text{despejo } t' = t'(\vec{r}, t)$$

$x(t') = v_0 t' - \frac{l}{2}$: posición de la partícula que emite.

$$\Rightarrow R_{ret}(x_0) = \frac{x_0 - v_0 t + l/2}{1 - \beta_0}$$

$$\therefore \vec{E}_{rad}(x_0, t) = - \frac{q^2 E}{m c^2} \sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}} \frac{\hat{y}}{x_0 - v_0 t + l/2}$$

durante el paso de la partícula por el capacitor : ⊗



⊗ : $\frac{x_0 + l/2}{c} < t < \frac{x_0 - l/2}{c} + \frac{l}{v_0}$

Les queda el calculo de $\vec{E}_{rad}(-x_0, t)$ y la comparación

Escaneado con CamScanner