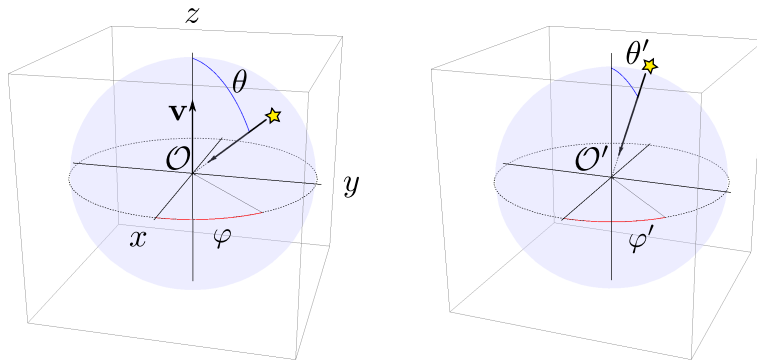


GUÍA 7: RELATIVIDAD ESPECIAL Y FORMULACIÓN COVARIANTE DEL ELECTROMAGNETISMO

1. (El cielo relativista.) El observador \mathcal{O}' se mueve con velocidad relativa \mathbf{v} respecto de \mathcal{O} . En cierto instante, los dos observadores coinciden en el mismo punto del espacio. En ese momento, los dos reciben luz proveniente de una misma estrella muy lejana. Ambos observadores eligen su eje z en la dirección de \mathbf{v} , de modo que escribirán el vector de la velocidad de la luz recibida según expresiones análogas; el observador \mathcal{O} , por ejemplo, escribirá $\mathbf{c}_{\mathcal{O}} = -(\cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) c$. Obviamente, $|\mathbf{c}_{\mathcal{O}}| = |\mathbf{c}_{\mathcal{O}'}| = c$.



- (a) Si \mathcal{O} recibe la luz según la dirección definida por los ángulos θ y φ , aplicando las fórmulas de transformación de velocidades, muestre que, según \mathcal{O}' , la luz proviene de la dirección definida por los ángulos

$$\varphi' = \varphi, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}. \quad (\beta = v/c)$$

- (b) Deduzca estas mismas expresiones a partir de la transformación del cuadrivector número de onda.
- (c) Una fórmula importante, que puede deducir de lo anterior, relaciona las tangentes de los ángulos θ y θ' . Sabiendo que $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ y $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$, deduzca la *fórmula de aberración relativista*:

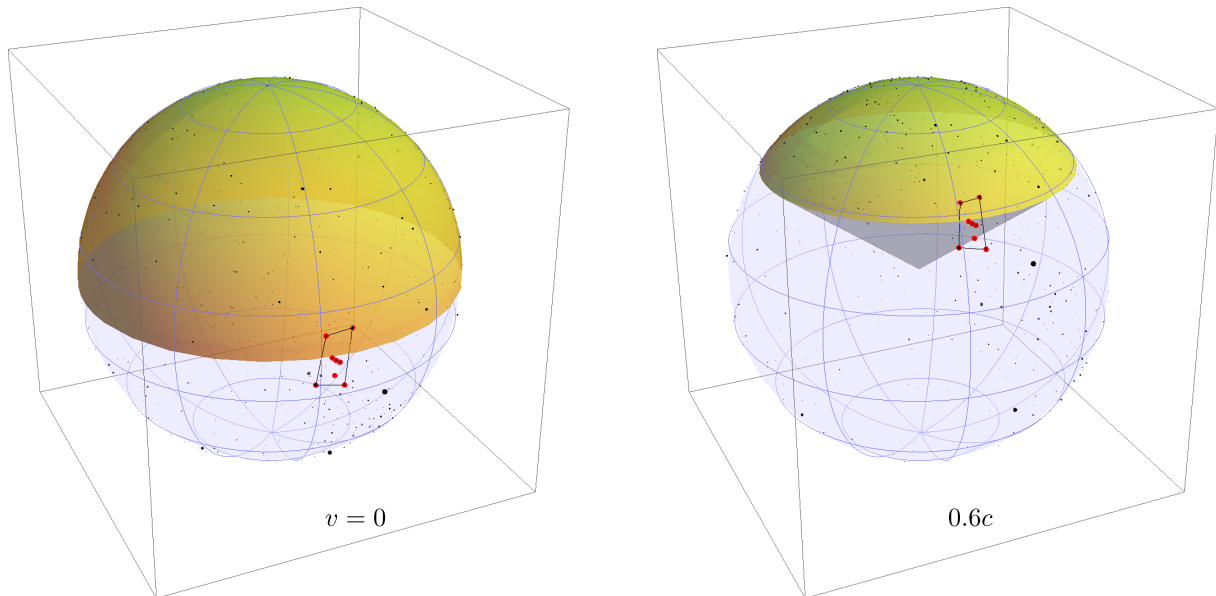
$$\tan \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan \frac{\theta}{2}.$$

- (d) Aplique la fórmula anterior para valores particulares del ángulo θ . Por ejemplo, $\theta = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi$. En especial, muestre que todas las estrellas en el hemisferio $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ de \mathcal{O} estarán concentradas, según \mathcal{O}' , en cierto cono alrededor del eje z . ¿Qué pasa cuando β se acerca a 1?
- (e) El observador \mathcal{O} ve una pequeña constelación triangular, cuyas 3 estrellas están en las direcciones

$$\hat{r} \rightarrow (\theta, \varphi), \quad \hat{r}_1 \rightarrow (\theta + \delta\theta_1, \varphi + \delta\varphi_1), \quad \hat{r}_2 \rightarrow (\theta + \delta\theta_2, \varphi + \delta\varphi_2).$$

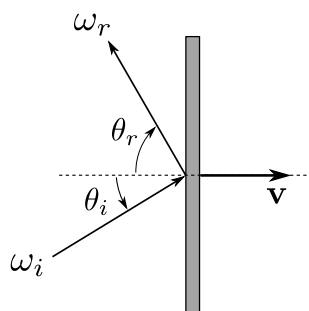
Halle las posiciones de las mismas estrellas según \mathcal{O}' a primer orden en los δ 's. ¿Qué relación geométrica guardan entre sí los triángulos que definen la constelación, según sea vista por uno u otro observador? ¿Pasará lo mismo con figuras más complicadas, como las Pléyades, o más extensas, como Orión?

- (f) A partir de los resultados anteriores, discuta cualitativamente cuál sería el aspecto de la bóveda celeste para un observador que pasara cerca de la Tierra moviéndose a una velocidad relativista.
- (g) El archivo adjunto* contiene las orientaciones de las 1000 estrellas más brillantes vistas desde la Tierra. Con esas estrellas, construya el mapa celeste para un observador relativista. Repita el experimento para valores crecientes de v . ¿Se comprueban o desmienten sus primeras intuiciones?



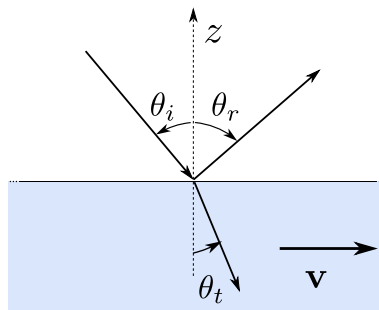
Un ejemplo de lo que debe obtenerse para el cielo del observador \mathcal{O}' en las vecindades de la Tierra: \mathcal{O}' se mueve en dirección a la estrella polar, con la velocidad indicada en cada caso. La sección sombreada abarca las estrellas del hemisferio superior del cielo de un observador en la Tierra. Se ha trazado el contorno de la constelación de Orión.

2. Sobre un espejo plano que se mueve con velocidad \mathbf{v} paralela a su normal incide luz de frecuencia ω_i con un ángulo de incidencia θ_i , como muestra la figura.
- (a) Encuentre la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Analice el caso $v \ll c$ y compare con el rebote de partículas no relativistas contra una pared en movimiento.
- (b) Encuentre la frecuencia de la onda reflejada. Para incidencia normal analice qué pasa cuando $v \ll c$ y compare con lo que cabría esperar si, en lugar de luz, hubiera un flujo de partículas o de sonido contra una pared en movimiento.



*http://materias.df.uba.ar/ft1a2015c2/files/2015/11/catalogo_de_estrellas.rar. El formato es $(\varphi, \theta, \text{magnitud})$.

3. Un sistema inercial S' se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto de un sistema S . Puede asumirse que los ejes de los dos sistemas coinciden en $t' = t = 0$.
- Si en S se miden los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, encuentre $\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}')$ y $\mathbf{B}'(t', \mathbf{r}')$ en S' .
 - Si en S se propaga una onda plana caracterizada por los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ y $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$, demuestre que en S' también se propaga una onda plana.
 - Si en S se miden los campos estáticos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, encuentre los campos en S' en los siguientes casos: 1) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$; 2) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$; 3) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$; 4) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$. Proponga ejemplos para cada situación.
4. En un sistema S , en cierto instante de tiempo y cierto punto del espacio se miden campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Demostrar que:
- Si \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares, lo mismo sucede en cualquier otro sistema inercial.
 - La relación de orden entre $|\mathbf{E}|$ y $|\mathbf{B}|$ es la misma en todos los sistemas.
 - Si \mathbf{E} es perpendicular a \mathbf{B} y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético. ¿Es único?
5. En un sistema de referencia inercial S , el campo eléctrico forma un ángulo θ con el campo magnético. Ambos campos son uniformes y estáticos.
- Encontrar un sistema de referencia S' tal que los campos sean paralelos.
 - Si en S los módulos de los campos cumplen $B_0 = 2E_0$, calcular los campos en el sistema de referencia hallado en (a). Tomar el límite para $\theta \ll 1$ y para $\theta \rightarrow \pi/2$. Verificar el comportamiento de los invariantes.
6. (Fresnel relativista.) En el sistema de laboratorio, una onda plana, de frecuencia ω y amplitud \mathbf{E} , incide desde el vacío sobre la superficie de un líquido de índice de refracción n y $\mu = 1$. El líquido ocupa el semiespacio $z < 0$ y se mueve con velocidad v paralela a su superficie. En el laboratorio, la polarización de la onda puede ser TE o TM. Encuentre la dirección, la amplitud, la polarización y la frecuencia de las ondas transmitidas y reflejadas en el sistema de laboratorio. ¿Es posible definir en el laboratorio un ángulo análogo al ángulo de Brewster?



7. Encontrar la amplitud y la intensidad de la onda reflejada en el problema 2.
8. Un cilindro circular macizo y de longitud infinita tiene densidad de carga y de corriente uniformes. La corriente es paralela al eje del cilindro. Encontrar un sistema de referencia en el cual sólo hay campo magnético o eléctrico. ¿Es único?

9. Un cilindro circular infinito está cargado uniformemente en volumen. Calcular los campos en un sistema de referencia que se mueve paralelo al cilindro. Primero, a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, y luego por transformación de los campos.
10. Ahora hay dos barras como la anterior, dispuestas una paralela a la otra. Demostrar que la fuerza por unidad de longitud sobre cualquiera de las barras, medida en un sistema de referencia S' que se mueve paralelo a ellas, es la misma que en el sistema S en el que las barras están en reposo. Demostrarlo primero a partir de la fuerza de Lorentz y de los campos en S' , y luego demostrando que el objeto $f^\mu \equiv \frac{1}{c} F^\mu_\nu j^\nu$ es el cuadvivector que es la generalización covariante de la densidad de fuerza. Como “yapa” del segundo método, obtener la ley de transformación relativista para la potencia disipada por efecto Joule.
11. Un dipolo magnético puntual \mathbf{m} se encuentra en reposo en el origen de un sistema S' , por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = 0$ y $\mathbf{A}' = \mathbf{m} \times \mathbf{r}'/r'^3$. El sistema S' se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto al sistema de laboratorio S .

(a) Demostrar que en S los potenciales a primer orden en β son

$$\Phi = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{R}}{c R^3}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

con $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, donde $\mathbf{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S .

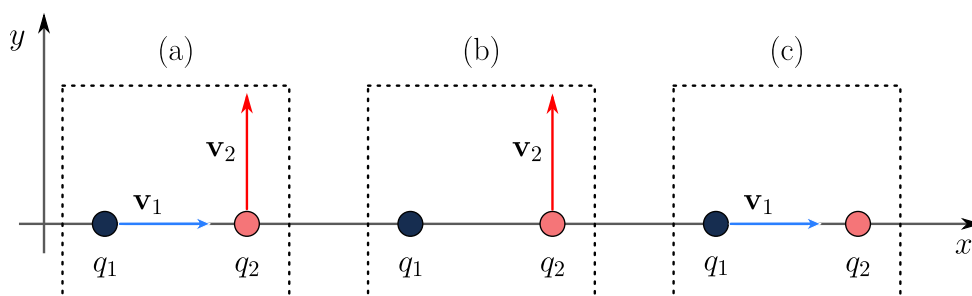
(b) A partir de estos potenciales, calcular \mathbf{E} y \mathbf{B} en S y mostrar que el campo eléctrico se puede escribir de las siguientes maneras alternativas

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/c) - \mathbf{m} \times \frac{[3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v}]}{cR^3} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/2c) + \frac{3}{2}\mathbf{n} \times \frac{[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{m} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})\mathbf{v}]}{cR^3} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ y $\mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{p})$ es el campo eléctrico de un dipolo efectivo de valor \mathbf{p} .

(c) Encontrar los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} en S , a primer orden en β , transformando directamente los campos $\mathbf{E}' = 0$ y \mathbf{B}' del sistema S' . Comparar con las expresiones anteriores.

- 12.* En los tres casos mostrados en la figura, calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre la otra. Verificar que las fuerzas no son iguales y opuestas. ¿Qué pasa con la conservación del impulso? (Las partículas son mantenidas en su estado de movimiento uniforme por un agente externo; o bien están fijas o bien se mueven a velocidad constante.)



Dos problemas de física aplicada

EL MONSTRUO RELATIVISTA O LO QUE MATA ES EL RELUMBRÓN

Example 3.7 A sphere subtends an angle 2θ when seen from a point P in its rest frame. An observer O passes through P with velocity \mathbf{v} . Show that to O , the sphere appears to subtend an angle 2α such that

$$c \cot \alpha = \gamma(v)(c \cot \theta + \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} \operatorname{cosec} \theta),$$

where \mathbf{e} is a unit 3-vector in the frame of the sphere in the direction from P to the centre of the sphere.

A disconcerting consequence of the formula in this example is that $\alpha \rightarrow \pi$ as $\mathbf{v} \rightarrow -c\mathbf{e}$. If O accelerates instantaneously directly *away* from the sphere, and increases his speed towards the velocity of light, then the area of the sky filled by the sphere grows. When his speed is $c \cos \theta$, $\alpha = \pi/2$, and the sphere occupies half the sky. At higher speeds, it occupies more than half the sky, and in the limit, only a small hole in the observer's forward direction is left uncovered.

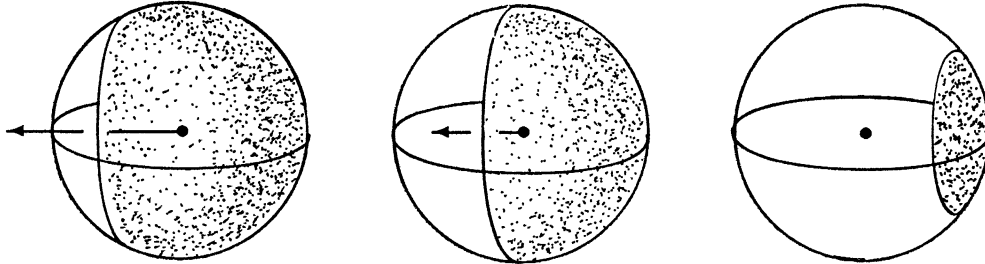


Fig. 3.6. The outline of the sphere as O accelerates away from it to the left. The spheres in the figure represent the sky, with the observer at the centre. The shaded portions are the areas covered by the images of the solid sphere

If an astronaut sees a space monster approaching, with jaws open ready to swallow his spaceship, and if he attempts to accelerate sharply away from the danger, then, when his speed exceeds $c \cos \theta$, where 2θ is the angle originally subtended by the jaws, he appears to be inside the monster's mouth. As he accelerates further, the jaws close around him. He is eventually killed by the glint on the monster's teeth, which is blue-shifted to high-frequency gamma radiation (exercise).

(Woodhouse, *Special Relativity*, 1992.)

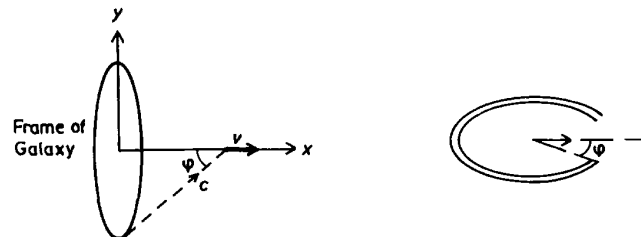
LA APUESTA DE FEYNMAN

In a simplified version of the ending of one of Fred Hoyle's novels, the hero, traveling at high Lorentz factor at right angles to the plane of our galaxy (Fig. 3.12), said he appeared to be inside and heading toward the mouth of a "goldfish bowl" with a blue rim and a red body (Fig. 3.13). Feynman betted 25 cents that the light from the galaxy would not look that way. We want to see who was right. Take the relative speed to be $\beta = 0.99$ and the angle φ in the frame of the galaxy to be 45° (Fig. 3.12).

(a) Derive (or recall) an expression for the relativistic aberration and use it to calculate (Fig. 3.13) the direction from which light from the edge of the galaxy appears to come when viewed in the spacecraft.

(b) Derive (or recall) the relativistic Doppler effect and use it to calculate the frequency ratio ν'/ν for light from the edge.

(c) Calculate φ' and ν'/ν at enough angles φ to decide who won the bet.



(Yung-Kuo Lim, *Problems and solutions on Mechanics*, 1994.)