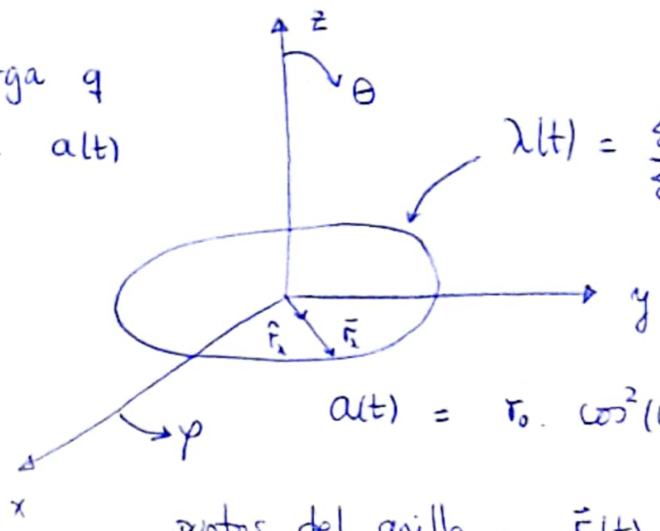
Problema 5. (d)

Anillo de carga q
radio variable $a(t)$



$\delta l = \delta\varphi . a(t)$

$\lambda(t) = \frac{\delta q}{\delta l} = \frac{q}{2\pi a(t)}$

$a(t) = r_0 . \cos^2(\omega t)$

puntos del anillo . $\vec{r}_\lambda(t) = a(t) . \hat{r}_\lambda$

donde: $\hat{r}_\lambda = \hat{r}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \hat{r}\big|_{z=0} = \underbrace{\hat{\rho}}_{\text{versor cilíndricas}} = \cos\varphi . \hat{x} + \sin\varphi \, \hat{y}$

cartesianas : $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$
cilíndricas : $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$
esféricas : $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$

- Calcular $\bar{E}_{rad}$ y $\bar{B}_{rad}$ (hasta orden 1 → { dip. magnético / cuadr. eléctrico }) (orden cero. dip. eléctr.)

$\rho_\lambda(t) = \delta(\rho - a(t)) . \delta(z) . \lambda(t)$: densidad volumétrica de la distribución

Momentos:

$$\vec{p}(\vec{r},t) = \int \rho_\lambda . \vec{r} \, d^3r = \int dl \, \lambda . \vec{r}_\lambda = \int_0^{2\pi} \overbrace{d\varphi . a(t)}^{dl} . \lambda(t) . \overbrace{a(t) . \underbrace{\hat{r}_\lambda}_{\hat{\rho}}}^{\vec{r}_\lambda} = 0$$

$$\vec{m}(\vec{r},t) = \frac{1}{2c}\int \vec{r} \times \vec{J} \, d^3r = \frac{1}{2c}\int \underbrace{\vec{r}_\lambda}_{\hat{\rho}} \times \text{“}I_\lambda\text{”} . \hat{\rho} = 0 \quad \left[\vec{\nabla}\vec{J}_\lambda = -\dot{\rho}_\lambda : \text{ec. conti.} \right]$$

$$\bar{\bar{Q}}_{ij}(\vec{r},t) = \int d^3r \, \rho_\lambda \left(3 r_i r_j - \delta_{ij} r^2\right) \; ; \quad [i,j = 1,2,3 : \text{componentes cartesianas}]$$

$$= \underbrace{3\int d^3r \, \rho_\lambda . r_i . r_j}_{(\bar{\bar{Q}}^{rad})_{ij}} - \underbrace{\delta_{ij} \int d^3r \, \rho_\lambda \, r^2}_{(\bar{\bar{Q}}^{*})_{ij}}$$

$(\bar{\bar{Q}}^{rad})_{ij} + (\bar{\bar{Q}}^{*})_{ij}$

cálculos auxiliares:

$$Q^{rad}_{ij} = 3 \int_0^{2\pi} \underbrace{d\varphi \,.\, a(t)}_{dl} \,.\, \lambda(t) \,.\, a^2(t) \,.\, (\hat{r}_\lambda)_i \, (\hat{r}_\lambda)_j$$

$$\left[\underline{aux.}: \quad \hat{r}_\lambda = \hat{x}\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\,\hat{y} + 0.\hat{z}\right]$$

$$= \frac{3q.a^2(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\operatorname{sin}\varphi & 0 \\ \operatorname{sin}\varphi\cos\varphi & \operatorname{sin}^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij}$$

$$\boxed{Q^{rad}_{ij}} = \underbrace{\frac{3}{2} q.a^2(t)}_{\equiv Q_r \,:\, \text{notación}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij}$$

$$\boxed{Q^*_{ij}} = -\delta_{ij} \int d\varphi .\, a^3(t).\, \lambda(t) \equiv Q^* . \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij}}_{}$$

$\mathbb{1}$: siempre aparece algo proporcional a la identidad en este término.

$$\vec{E}_{rad} \underset{\substack{(\text{anillo}) \\ \text{sólo cuadrupolar}}}{=} \left. \frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \dddot{\vec{Q}})}{6.c^3.r} \right|_{t_{ret}} ; \quad (\vec{Q})_i = (\bar{\bar{Q}}.\hat{r})_i = Q_{ij}.\hat{r}_j$$

$$t_{ret} = t - \frac{r}{c}$$

cálculos auxiliares

$$(1): \ (\vec{Q})_i = \left[Q^{rad}_{ij} + Q^*_{ij}\right].\hat{r}_j$$

$$= \Big(Q_r \underbrace{(c\varphi s\theta\,\hat{x} + s\varphi s\theta\,\hat{y})}_{\hat{r} - (\hat{z}\cdot\hat{r})\,\hat{z}} + Q^*.\hat{r}\Big)_i$$

$$(2): \ \hat{r} \times \dddot{\vec{Q}} = \dddot{Q}_r .\, \hat{r} \times (\hat{r} - (\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{z}) + \dddot{Q}^* \underbrace{\hat{r} \times \hat{r}}_{=0}$$

$= 0$: siempre desaparece este término* (proporcional a $\mathbb{1}$)

$$= \dddot{Q}_r \underbrace{(\hat{z}\cdot\hat{r})}_{\cos\theta} \hat{z} \times \hat{r}$$

usamos $\hat{r} = \hat{\rho} \cdot \sin\theta + \cos\theta \, \hat{z}$; $\hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \hat{r} \times \dddot{\vec{Q}} = \dddot{Q}_r \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \hat{\varphi}$$

$$(3) \quad \hat{r} \times (\hat{r} \times \dddot{\vec{Q}}) = -\dddot{Q}_r \cos\theta \sin\theta \, \hat{\theta} \quad ; \quad Q_r \equiv \frac{3}{2} q \cdot a^2(t)$$

$\therefore$

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{6c^3 r} \dddot{Q}_r \cos\theta \sin\theta \cdot \hat{\theta} \Big|_{t_{ret}}$$

aux : $$\dddot{\left[a^2(t)\right]} = \frac{d^3}{dt^3}\left(r_0^2 \cos^4 \omega t\right)$$

$$= r_0^2 \frac{d^3}{dt^3}\left[\frac{1}{8}\left(3 + 4\cos(2\omega t) + \cos(4\omega t)\right)\right]$$

$$= 4 \cdot \omega^3 \cdot r_0^2 \left(\sin(2\omega t) + 2 \cdot \sin(4\omega t)\right)$$

$$\bullet \begin{cases} \vec{E}_{rad} = -q \dfrac{\omega^3 r_0^2}{c^3 r} \cdot \left[\sin(2\omega t') + 2\sin(4\omega t')\right] \cos\theta \sin\theta \cdot \hat{\theta} \Big|_{t' = t - r/c} \\ \vec{B}_{rad} = -q \dfrac{\omega^3 r_0^2}{c^3 r} \left[\sin(2\omega t') + 2\sin(4\omega t')\right] \cdot \cos\theta \sin\theta \cdot \hat{\varphi} \Big|_{t' = t - r/c} \end{cases}$$

r, t : fijos :

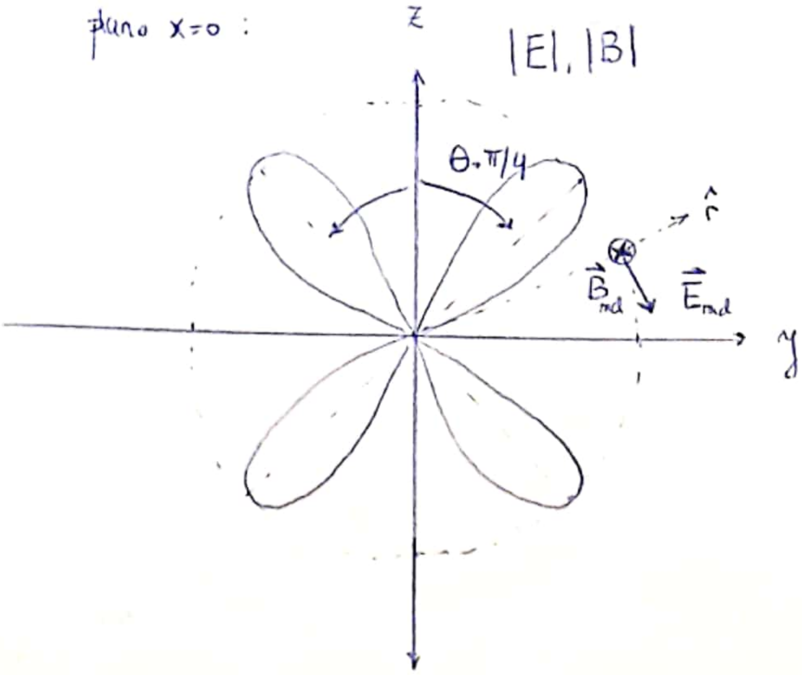
$\cos\theta \sin\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{2}$

$\vec{E}_{rad} = |E| \, \hat{\theta}$

$\vec{B}_{rad} = |E| \, \hat{\varphi}$

$|E| \sim \sin(2\theta)$

plano $x = 0$:



- <u>Potencia por unidad de ángulo sólido</u>.

$$\frac{dP}{d\Omega}(\bar{r},t) = r^2 \cdot \vec{S}(\bar{r},t)\cdot\hat{r} \quad ; \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}|E_{rad}|^2\cdot\hat{r}$$

$$= \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\dddot{Q}_r}{6c^3}\right)^2_{t_{ret}}\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 \quad ; \quad Q_r \equiv \frac{3}{2}q\,a^2(t)$$

$$t_{ret} = t - r/c$$

$\downarrow$

Energía por unidad de tiempo por unidad de ángulo sólido que atraviesa en la dirección $\hat{r}$, la posición r a tiempo t y fue emitida en $t' \simeq t - r/c$.

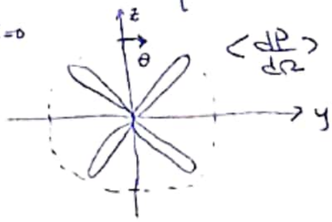
$$\left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^{T} dt\,\frac{dP}{d\Omega}(t) = \ldots\ldots = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{q r_0^2\omega^3}{c^3}\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2\left[\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}\right]$$

$\downarrow$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$: elijo el período

términos con: $s^2(2\omega t) \longrightarrow 1/2$
$s^2(4\omega t)\cdot 2^2 \longrightarrow 2^2/2$
interferencia : no aportan.

$$\left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle = \frac{5c}{32\pi}\left(\frac{q r_0^2\omega^3}{c^3}\right)^2\cdot\sin^2(2\theta) \quad : \quad x=0$$



- <u>Potencia total</u> (en todas las direcciones):

$$P(t) = \int d\Omega\,\frac{dP}{d\Omega} = 2\pi\int_0^{\pi} d\theta\,.\sin\theta .\frac{dP}{d\Omega}(\bar{r};t) = \frac{8\pi}{15}\,\frac{c}{4\pi}\left(\frac{\dddot{Q}_r}{6c^3}\right)^2_{t_{ret}}$$

- <u>Promedio temporal de $P(t)$</u>:

$$\langle P(t)\rangle_T = \frac{5c}{32\pi}\cdot\left(\frac{q r_0^2\omega^3}{c^3}\right)^2\cdot 4\,\frac{8\pi}{15} = \frac{1}{3}\cdot c\left(\frac{q r_0^2\omega^3}{c^3}\right)^2$$

<u>Obs</u>. La radiación emitida tiene frecuencia 2ω y 4ω (2 frecuencias armónicas distintas). Para aplicar las fórmulas de la radiación de la teórica hay que superponer: $\bar{E}_{rad}^{(\omega_1=2\omega)} + \bar{E}_{rad}^{(\omega_2=4\omega)} = \bar{E}_{rad}$