Método de imágenes. Función de Green. Separación de variables.

1. Una esfera conductora de radio a está conectada a potencial V y rodeada por una cáscara esférica de radio b cargada uniformemente con densidad σ. Se pide:

   a) Hallar el potencial electrostático en todo el espacio mediante el método de imágenes.

   b) Encontrar la distribución de cargas imagen y la carga total inducida sobre la esfera conductora. ¿Es única la distribución de cargas imagen que resuelve el problema?

2. a) Hallar el potencial electrostático del problema anterior utilizando el método de la función de Green.

   b) Analizar la relación entre el método de imágenes y el de la función de Green. Identificar la procedencia de cada una de las tres contribuciones a la integral de Green.

3. Una esfera de radio a está conectada a tierra. A una distancia $d > a$ de su centro hay un dipolo puntual $\mathbf{p}$.

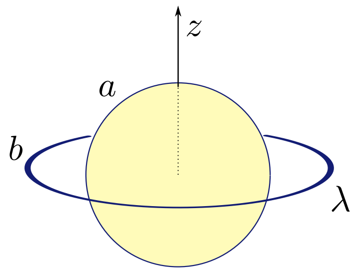
   a) Calcular el potencial fuera de la esfera utilizando el método de imágenes.

   b) Volver a resolver el apartado anterior utilizando el método de la función de Green.

   c) Calcular la densidad de carga inducida sobre la esfera y la carga inducida total.

   d) Escribir el potencial para $r \gg a$ conservando términos de hasta orden $(a/r)^2$. Interpretar en términos de la carga total y del momento dipolar total de las cargas fuentes e imágenes.

4. Se tienen una esfera conductora de radio a conectada a tierra y un anillo concéntrico de radio $b > a$ con carga total Q distribuida uniformemente.



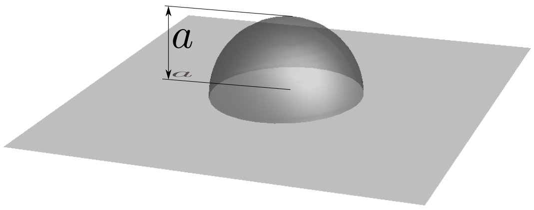
   a) ¿Cómo hallaría el potencial fuera de la esfera utilizando el método de imágenes? Obtener el potencial explícitamente para puntos ubicados sobre el eje del anillo y estudiar su comportamiento para puntos lejanos a la esfera.

   b) Encuentre el potencial utilizando el método de la función de Green.

   c) ¿Cómo calcularía la densidad de carga inducida sobre la esfera? ¿Qué puede decirse sobre el valor total de la carga inducida?

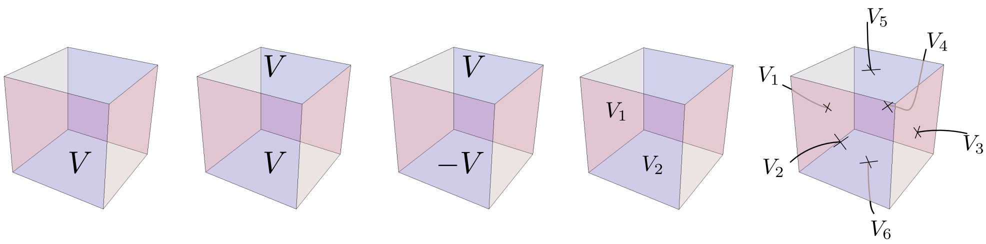
   d) ¿Cómo resolvería el problema si la esfera estuviera aislada y descargada?

5. Un contorno mixto consiste en un plano infinito y una semiesfera de radio a, como muestra la figura. Calcular la función de Green (con condiciones de Dirichlet) en la región por encima del contorno. Interprete el resultado.

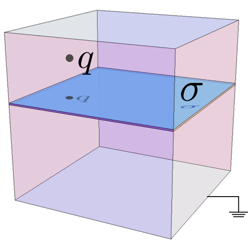


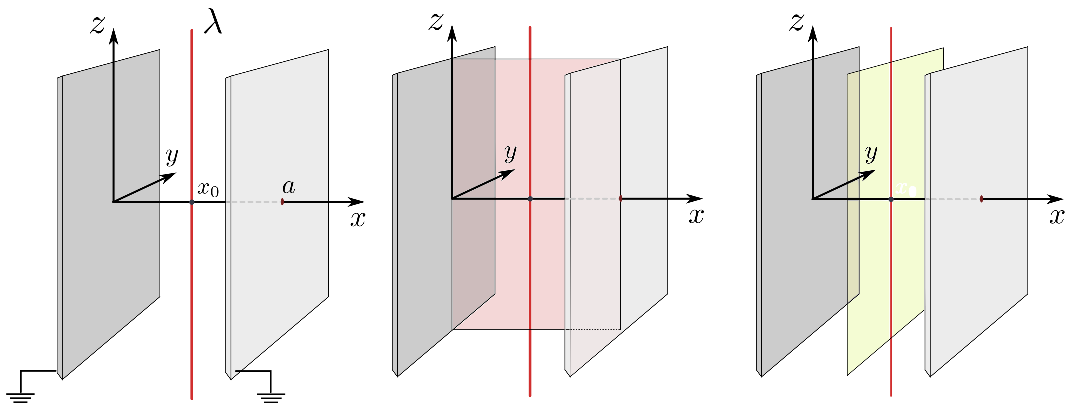
6. $\star$ Utilice el método de imágenes para hallar la función de Green (con condiciones de Dirichlet) para la región contenida entre dos esferas concéntricas de radios a y b. *Nota*: es necesario utilizar una serie infinita de imágenes.

7. Un cubo de lado a tiene sus tapas al potencial que muestra cada figura. Las tapas donde no se indica ningún valor del potencial están a tierra. Encontrar el potencial en el **interior** del cubo en cada caso.



8. Un cubo de lado a está conectado a tierra. En su interior hay un cuadrado con densidad superficial uniforme σ y una carga puntual q. Calcule el potencial **en todo el espacio**.





9. Un alambre con densidad de carga constante λ está equidistante a dos placas conductoras infinitas conectadas a tierra, como muestra la figura ($x_0 = a/2$).

   Utilizando separación de variables, encuentre el potencial **en todo el espacio**. Para ello divida la región entre las placas de los siguientes modos:

   a) Con un corte vertical perpendicular a los planos.

   b) Con un corte vertical paralelo a los planos.

   c) $\star$ Compare las dos formas de la solución. Tanto la integral como la suma de Fourier que han aparecido al aplicar las dos separaciones pueden hacerse de manera explícita y la solución es una función simple. Encuentre esa función.

10. Calcular el potencial y el campo electrostático en todo punto del espacio producido por un cuadrado cargado con densidad uniforme σ. Puede asumirse que el cuadrado están sobre el plano xy, que su centro coincide con el origen y que sus lados están alineados con los ejes x e y.

11. Encuentre la función de Green para el problema de Dirichlet en el interior de un cilindro semi-infinito de sección cuadrada de lado a (es decir, $0 \leq x, y \leq a$, $0 \leq z < \infty$). Repita el cálculo para un cilindro cuadrado infinito (ahora $-\infty < z < \infty$).

12. *a*) Encontrar el potencial de una carga puntual q entre dos cáscaras esféricas conductoras concéntricas y conectadas a tierra, de radios a y b, utilizando el método de separación de variables.

   b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.

   c) Observar qué sucede cuando se hace tender el radio de la esfera exterior a infinito ¿Cuánto valen las cargas totales inducidas en ese caso?

   d) Resolver el problema en el caso en que los potenciales de las esferas se elevan a V_1 y V_2. (Ver último problema de la guía 1).

   e) Resolver el problema en el caso en que las esferas están aisladas y tienen una carga total Q_1 y Q_2. (Ver último problema de la guía 1).

13. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2. Resolver las integrales explícitamente para simplificar la expresión del potencial para puntos ubicados sobre el eje de simetría. Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo

en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.

14. Resolver nuevamente el problema 2 utilizando el método de separación de variables.

15. Resolver nuevamente el problema 4 utilizando el método de separación de variables.

16. Un cilindro de radio a y altura h tiene su superficie lateral conectada a tierra, mientras que las tapas se mantienen a potenciales V y $-V$. Hallar el potencial en el interior del cilindro.

17. *a*) Usando separación de variables en coordenadas cilíndricas, hallar el potencial y el campo electrostático producidos por un disco de radio a cargado con densidad uniforme σ.

    b) A través de límites adecuados, verificar que la expresión obtenida se reduce en un caso a la de una carga puntual, y en otro a la de un plano infinito.

18. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de un cilindro circular de radio a y longitud L, separando en regiones de las siguientes maneras:

    a) Cortando con un plano perpendicular al eje del cilindro.

    b) Cortando con un cilindro coaxial al cilindro original.

19. Ídem al problema anterior pero para un cilindro de longitud infinita. Encuentre también la función de Green para el problema externo utilizando el segundo tipo de corte. ¿Sabría cómo resolver el problema externo usando el primer tipo de corte?

20. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de una estructura con forma de cuarto de cilindro circular, infinito y de radio a, siguiendo estos dos caminos:

    a) Usando separación de variables en el cuarto de cilindro a partir de la ecuación para $\nabla^2\Phi$ en coordenadas cilíndricas y con condiciones de contorno adecuadas.

    b) Usando imágenes y la función de Green para el cilindro infinito obtenida en el problema anterior.

21. *a*) Usando separación en coordenadas cilíndricas, calcular la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos planos infinitos, ubicados en $z = 0$ y $z = L$.

    b) Si se coloca una carga q a una altura z entre los planos, calcular las densidades de carga y las cargas totales inducidas sobre cada plano.