Medios Materiales. Desarrollo multipolar

1. Considere una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ε_1 sumergida en otro medio de permitividad ε_2. A una distancia $d < a$ del centro de la esfera se encuentra una carga q.

   a) Halle el potencial electrostático en todo punto del espacio.

   b) Halle las densidades de carga de polarización en volumen y superficie.

2. *a*) En un medio de constante dieléctrica ε se sumerge una esfera conductora de radio a cargada con una carga total Q. Hallar los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en todo punto del espacio, y las distribuciones de carga libre en el conductor y de polarización en el dieléctrico.

   b) La misma esfera conductora del caso anterior se conecta ahora a una batería de potencia V. Resolver lo mismo del caso anterior.

   c) Si bien existe una analogía formal entre ambos casos, se manifiesta una diferencia esencial entre ellos: la forma de dependencia de los campos con ε. Explicar las causas de esta diferencia.

3. Una esfera homogénea de radio a tiene permitividad ϵ y es concéntrica con una cáscara esférica de densidad de carga $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ y radio b. Analizar por separado los casos $a < b$ y $b < a$:

   a) Calcular el potencial en todo punto del espacio. Hallar la distribución de cargas de polarización en volumen y en superficie y el momento dipolar del dieléctrico. ¿Coinciden los límites $b \to a^+$ y $b \to a^-$?

   b) Estudiar el problema con el conjunto sumergido en un campo uniforme en el infinito, $\vec{E} = \vec{E}_0 \hat{z}$.

4. Una esfera conductora de radio a está a potencial cero. Entre $r = a$ y $r = b$ hay un dieléctrico de permitividad ε, y ubicada a una distancia r' del origen hay una carga q. Considerar separadamente los dos casos $a < b < r'$ y $a < r' < b$.

   a) Identificar dónde se encuentran las cargas y hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio.

   b) Hallar las densidades de carga de polarización en volumen y superficie, y las densidades de carga libre en todo el espacio.

   c) Analizar los casos $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon \to \infty$.

   Ayuda: usando la forma genérica del potencial de una cáscara cargada frente a una esfera (que puede deducirse en una línea), bastará plantear una sola ecuación con una sola incógnita. En otro caso tendrá que plantear 5 ecuaciones con 5 incógnitas.

5. Un medio dieléctrico de permitividad ε ocupa el semiespacio con $z < 0$. A una altura $d > 0$ sobre el dieléctrico hay una carga q.

   a) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio usando separación de variables en coordenadas cartesianas.

b) Para cada una de las expresiones obtenidas en (a), identifique la contribución al potencial asociada exclusivamente a la carga q. Es decir, escriba $\phi = \phi_q + \phi_r$, donde ϕ_q es el potencial de la carga original. ¿A qué simple distribución de cargas puntuales puede atribuirse, en cada región, la parte restante del potencial, ϕ_r?

c) ¿A qué se reduce la solución cuando $\varepsilon \to \infty$? ¿Cuál es la interpretación física de este resultado?

d) Generalice los resultados anteriores al caso en que el semiespacio superior está ocupado por un medio con permitividad ε_1 y el inferior por un medio con permitividad ε_2. En términos de las permitividades, ¿cuál es la magnitud que caracteriza al problema?

e) Encuentre la función de Green para todo el espacio según las condiciones del ítem anterior. (Notar que la carga puede estar en cualquier posición, por encima y por debajo del plano $z = 0$.)

6. Hallar el potencial electrostático en todo el espacio producido por la configuración de la figura: un disco de radio a y densidad superficial uniforme σ ubicado dentro de una esfera dieléctrica del mismo radio y permitividad ϵ.

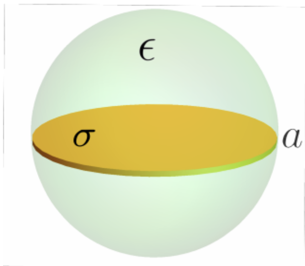


Figura 1: Problema 6

7. **Imán esférico.** Una esfera de radio a está uniformemente magnetizada con densidad $\mathbf{M} = M\hat{z}$.

a) Calcular los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ usando la integral de Poisson para el potencial escalar magnético $\Phi_{\vec{H}}$, continuo en todo el espacio y tal que $-\nabla\Phi_{\vec{H}} = \vec{H}$. Identificar el problema eléctrico equivalente. Comparar el potencial en el exterior de la esfera con el que produciría un dipolo magnético puntual igual al momento dipolar total de la esfera.

b) Calcular el potencial escalar magnético $\Phi_{\vec{H}}$ usando ahora separación de variables en esféricas.

c) Calcular el potencial vector $\vec{A}$ mediante la integral de Poisson y, a partir de ahí, $\vec{B}$ y $\vec{H}$.

d) La misma esfera magnetizada está ahora situada en un medio lineal, isótropo y homogéneo de permeabilidad μ, que se extiende entre $r = a$ y $r = b > a$, concéntrico con la esfera. Calcule los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio y encuentre el momento magnético total $\mathbf{m}$ inducido en el medio. Verifique que para $\mu = 1$ se obtienen los resultados de los ítems anteriores.

8. **Imán cilíndrico.** Un cilindro de radio a y longitud L está orientado según la dirección z, con sus tapas en $z = \pm L/2$, y está caracterizado por una densidad de magnetización uniforme $\vec{M} = M\,\hat{z}$.

   a) Calcular los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ a partir de un potencial escalar magnético $\Phi_{\vec{H}}$, continuo en todo el espacio y tal que $-\nabla\Phi_{\vec{H}} = \vec{H}$. Escribir $\Phi_{\vec{H}}$ como un desarrollo en las funciones de Bessel $J_\nu(k\rho)$ o como una integral de Fourier en z.

   b) ¿A qué distribución de corriente es equivalente este imán?

   c) A partir del campo del imán, calcular el campo $\vec{B}$ producido por un solenoide cilíndrico, de radio a y longitud L, por el que circula una corriente I y que tiene n espiras por unidad de longitud.

   d) Calcular explícitamente los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ del imán cuando $L \to \infty$.

9. Una esfera de radio a, magnetizable con permeabilidad μ, está centrada con una espira de radio $b > a$ por donde circula una corriente I, como muestra la figura.

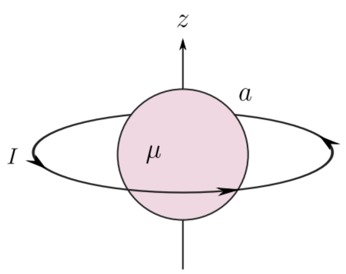


Figura 2: Problema 9

   a) Indicar todas las fuentes de cada uno de los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$.

   b) ¿Por qué no es cierto que $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_{\mathrm{H}}$? ? (con Φ_{H} el potencial escalar magnético continuo en todo el espacio).

   c) Calcular el campo magnético en todo el espacio en términos del campo $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_d$ con fuentes en su rotor y fuentes en su divergencia.

10. **Imán Borgeano.** Para que no se acostumbren a pensar que todos los imanes tienen una magnetización uniforme, aquí se les propone el caso de un imán limitado por los planos $z = 0$ y $z = d$. En las direcciones x e y se extiende entre $-\infty$ y $+\infty$. La densidad de magnetización dentro del imán está dada por

$$\mathbf{M}(x) = m_0(\sin qx\ \hat{x} + \cos qx\hat{z})$$

con $q > 0$. Es decir, según un corte en el plano xz, la magnetización va rotando como en la figura de abajo. Puesto que la magnetización es permanente y conocida en todo el espacio, el paso a un problema electrostático equivalente es el camino más sencillo. Pero como $\mathbf{M}$ no es uniforme, puede haber cargas superficiales y de volumen,

$$\sigma = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2).\mathbf{n}, \qquad \rho = -\nabla.\mathbf{M}.$$

a) Calcular el potencial escalar para el campo $\mathbf{H}$ y el campo magnético en todo el espacio, pero especialmente en las regiones por encima y por debajo del imán. *Ayuda: Integrar la función de Green para cada contribución*

b) La solución es una expresión cerrada que no incluye sumatorias ni integrales. Cuando la obtengan, hagan un poco de ingeniería inversa: analicen a posteriori qué tipo de cosas podrían haber deducido a priori. Esto, en algunos ámbitos, recibe el nombre de *m*ixtificación, o también *t*rampa, pero en física suele ser el camino normal cuando uno se enfrenta a problemas nuevos. Con la solución a la vista, súbitamente se vuelven triviales varias cosas, y entonces pueden dar una solución más compacta y razonada.

c) Si el resultado no les parece desconcertante, es que hicieron algo mal o que no tienen corazón. Por fin, ¿dónde está lo borgeano de este imán? Descubran ustedes en qué línea del poema La cierva blanca se esconde una referencia borgeana al imán que acabamos de describir.

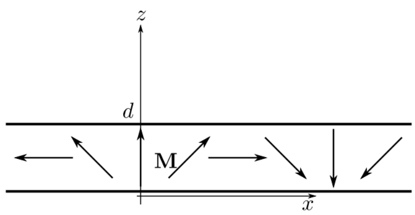
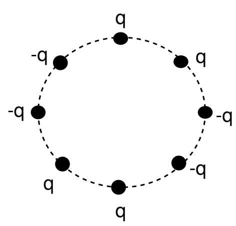


Figura 3: Problema 10

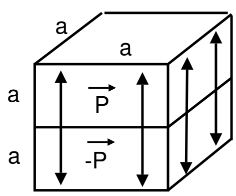
11. Calcule los momentos multipolares hasta el cuadrupolar inclusive de las siguientes configuraciones:

a) Cargas puntuales distribuídas sobre un círculo como muestra la figura (a).

b) Dos cubos con polarización uniforme unidos como muestra la figura (b).



(a)



(b)

12. Calcular el potencial y el campo creados por un disco de radio a con una densidad superficial de momento dipolar $\vec{P}$ perpendicular al disco. Hacer el cálculo para los puntos situados sobre el eje del mismo. Obtener expresiones límites para puntos muy cercanos y muy lejanos. Graficar e interpretar los resultados.