Ondas planas

1. Encontrar las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas en el problema de una interfase entre dos dieléctricos (μ, ϵ, y μ', ϵ') para incidencia TM y TE.

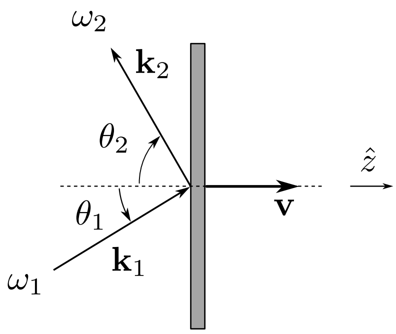
2. Una interfase plana se mueve con velocidad constante. La interfase está definida por la ecuación $z = vt$. La región $z < vt$ corresponde al vacío. Del otro lado, moviéndose también a velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{z}$, hay un medio lineal, isótropo y homogéneo, pero no interesa definirlo ni se va a usar para nada. Podría también ser un conductor ideal o un espejo en movimiento. Supongan que incide una onda desde el vacío, con número de onda $\mathbf{k}_1$ (real) y frecuencia ω_1. Pueden tomar, por ejemplo,

$$\mathbf{k}_1 = \cos\theta_1\,\hat{z} + \sin\theta_1\,\hat{x},$$

de manera que todo transcurre en el plano xz. La onda es verdaderamente incidente si $\cos\theta_1 > 0$ y $\omega_1 > 0$. Ahora, procediendo a imagen y semejanza de lo hecho para la interfase en reposo, en donde la igualdad de las frecuencias y de las proyecciones de los números de onda se obtenía pidiendo la cancelación de los términos que dependían del tiempo y de la posición sobre la interfase, su misión es encontrar la frecuencia ω_2 (que no va a ser igual a ω_1) y el número de onda $\mathbf{k}_2$ de la onda reflejada, en particular la relación entre el ángulo de incidencia y el reflejado. Recordar, de paso, que lo convencional es escribir

$$\mathbf{k}_2 = -\cos\theta_2\,\hat{z} + \sin\theta_2\,\hat{x},$$

como muestra la figura:



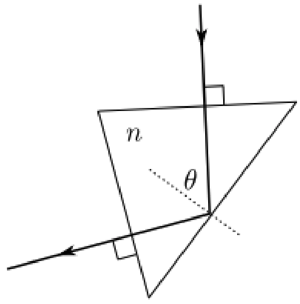
3. **Reflexión total interna**. Sobre una superficie dieléctrico−vacío, incide desde el dieléctrico (índice n real, $\mu = 1$) una onda plana linealmente polarizada con polarización TM, con un ángulo mayor que el ángulo crítico.

   a) Encontrar el vector de onda de la onda transmitida. Escribir explícitamente la parte real y la parte imaginaria del vector de onda. ¿En qué dirección se propaga la onda transmitida? ¿En qué dirección se atenúa? ¿Cuál es la longitud típica de atenuación?

   b) Mostrar que en la zona de vacío no hay, en promedio, flujo del vector de Poynting en la dirección normal.

   c) Si la onda en la situación anterior incidiera además con el ángulo de Brewster, no habría tampoco onda reflejada. ¿Es esto posible?

4. Una onda plana, polarizada a 45° respecto del plano de incidencia, es totalmente reflejada (reflexión total interna) por un prisma, al cual entra y sale normalmente. Demostrar que la



intensidad del rayo emergente es $16n^2/(1+n)^4$ veces la intensidad incidente, donde n es el índice de refracción del prisma. Demostrar que el rayo emergente está elípticamente polarizado, con un desfasaje

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{\cos\theta}{(\sin\theta)^2}\sqrt{(\sin\theta)^2 - n^{-2}},$$

donde θ es el ángulo de incidencia en la cara posterior del prisma. No considerar reflexiones múltiples y tomar $\mu = 1$ en todo el espacio.

5. **Problema de las dos interfases**. Una lámina dieléctrica de permitividad ϵ_2 y espesor d separa dos medios semiinfinitos que tienen permitividades ϵ_1 y ϵ_3 ($\mu = 1$ en todo el espacio). Una onda plana de amplitud $\vec{E}_i$ incide sobre la interfase que separa los medios 1 y 2, formando un ángulo θ con la normal.

   a) Considere por separado los casos TE y TM. Escriba el sistema de ecuaciones que determina todos los campos. Preste atención a las fases que sobreviven luego de eliminar las dependencias temporales y espaciales sobre cada interfase. Resuelva las ecuaciones para los campos. Descanse unos minutos.

   b) Método alternativo y mucho más práctico: primero, notar que en la segunda interfase el problema involucra sólo tres ondas, de manera que las amplitudes están relacionadas por los coeficientes de transmisión y reflexión usuales, T_{23} y R_{23}. Eso elimina dos incógnitas de un plumazo (pero atención a las fases). En la primera interfase descomponga el problema como la superposición de dos problemas de tres ondas, con una onda incidente a cada lado de la interfase. Eso da, sin ningún trabajo, dos ecuaciones. La solución es inmediata y vale tanto para incidencia TM como TE. En particular, demuestre que el campo reflejado hacia el primer medio y el transmitido hacia el tercero tienen las siguientes amplitudes respecto del campo incidente:

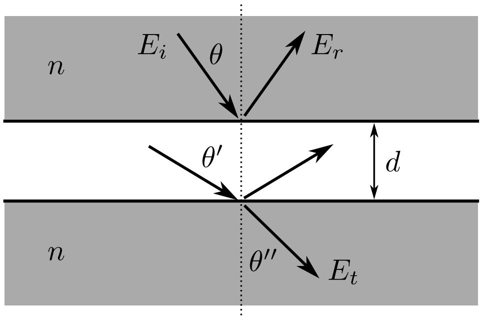
   $$\frac{E_r}{E_i} = \frac{R_{12} + R_{23}e^{2i\alpha}}{1 + R_{12}R_{23}\,e^{2i\alpha}}, \qquad \frac{E_t}{E_i} = \frac{T_{12}T_{23}e^{i\alpha}}{1 + R_{12}R_{23}\,e^{2i\alpha}},$$

   donde R_{ij} y T_{ij} son los coeficientes de reflexión y transmisión para una sola interfase y $\alpha = n_2\cos\theta'\omega d/c$, siendo θ' el coseno del ángulo que forman con la normal los vectores de onda en el segundo medio. (Puede ser útil saber que: $T_{ij}T_{ji} = 1 - R_{ij}^2$ y que $R_{ij} = -R_{ji}$.)

   c) Para $\theta = 0$, calcule el **promedio temporal** de los vectores de Poynting en los tres medios. Verifique que son iguales.

d) Para $\theta = 0$, ¿qué condición deben cumplir d y los ϵ_i para que no haya onda reflejada en el medio 1.

6. **Reflexión total interna frustrada**. Considerar de nuevo el problema de las dos interfases, donde ahora el primer y el tercer medio tienen índice de refracción $n > 1$ y el medio central tiene $n' = 1$, como muestra la figura. En todo el espacio es $\mu = 1$. Suponer que la onda incidente es de tipo TE y que incide con un ángulo θ mayor (pero no muy próximo) al ángulo crítico entre el dieléctrico y el vacío. Notar que la figura es convencional: el vector de onda en la capa intermedia va tener parte real e imaginaria, y el ángulo θ' no puede en realidad dibujarse.



a) ¿Cuánto vale θ''?

b) Hallar la amplitud de la onda reflejada en el primer medio y la de la onda transmitida en el tercero.

c) Verificar que para $d = 0$ y $d \to \infty$ se recuperan los resultados previsibles. ¿Cuál es la escala de longitud con la que debe compararse d para saber si el problema puede aproximarse por alguno de esos dos casos?

d) Encontrar el comportamiento de la amplitud de la onda transmitida cuando d es próximo a cero y cuando $d \to \infty$. Es decir, diga cómo tiende la amplitud a los valores límite del ítem anterior.

e) Usando esas expresiones, encuentre en cada caso el valor medio de la componente normal del vector de Poynting en el tercer medio.

7. **Reflexión y transmisión en un buen conductor**. Considerar el problema de incidencia de una onda plana sobre una interfase vacío−conductor óhmico. El conductor ocupa el semiespacio $0 < z$. Asumir que $\epsilon = \mu = 1$ en todo el espacio, y que la conductividad σ del conductor es independiente de la frecuencia. Asimismo, asumir que $\omega \ll \sigma$, de modo que la corriente de desplazamiento en el conductor puede despreciarse. La onda incide desde el vacío con un ángulo θ.

a) Teniendo en cuenta todas las aproximaciones señaladas, encontrar la relación de dispersión $k(\omega)$ en el conductor.

b) Encontrar el **vector** de onda en el conductor, eligiendo la solución que es apropiada para la región $0 < z$. Escribir explícitamente la parte real y la parte imaginaria del vector de onda. ¿En qué dirección se propaga la onda transmitida? ¿En qué dirección se atenúa?

¿Cuál es la longitud típica de atenuación? ¿Qué pasa con la dirección de propagación a medida que el espesor pelicular $\delta \to 0$?

c) Encontrar las amplitudes (complejas) de las ondas reflejadas y transmitidas. Estudiar el límite $\delta \to 0$. Considerar los casos TE y TM.

d) Demostrar que para un buen conductor, en el caso de incidencia normal, el coeficiente de reflexión es aproximadamente $r \approx 1 - 2\delta\omega/c$.

e) Calcular la longitud de atenuación en cobre para una frecuencia de 60 Hz ($\sigma \approx 5 \times 10^{17}$ s^{-1}), y para ondas de radio de 100 kHz en agua de mar ($\sigma \approx 5 \times 10^{10}$ s^{-1}).

8. Considere una onda TE que incide con ángulo θ_1 en un buen conductor con longitud de penetración $\delta(\omega)$ desde un medio con permitividad eléctrica ϵ e índice de refracción n_1. Ambos medios tienen $\mu = 1$. Mostrar que la diferencia de fase entre la onda reflejada y la incidente es: $\pi + tan^{-1}(\omega/cn_1\delta(\omega)\cos(\theta_1))$.

9. Una onda plana $\mathbf{E} = \hat{y}E_0 e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{x}-\omega t)}$ que se propaga en vacío en la dirección $-z$, incide normalmente sobre una capa de espesor d e índice n ($\mu = 1$ en todo el espacio). La interfase en $z = 0$ está cubierta de un conductor perfecto como indica la figura.

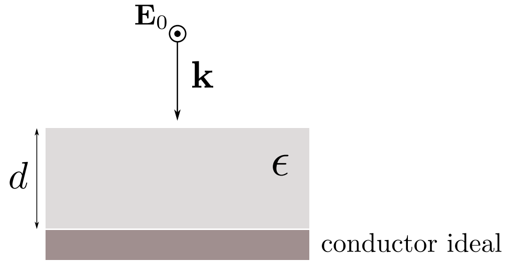
   a) Escribir lo campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en cada región del espacio y los vectores de onda $\mathbf{k}$. Indique claramente el plano de incidencia.

   b) Sin utilizar los coeficientes de Fresnel, muestre que las amplitudes de las ondas incidente y reflejada en el medio 1 son iguales. Muestre además que si están evaluadas en en cara frontal del slab ($z = d$), estan desfazadas y que la fase de la onda reflejada excede a la de la fase incidente en:
$$\alpha = -\pi + 2\text{arctan}\left[\frac{\tan(nkd)}{n}\right]$$

   c) Escriba todos los campos involucrados en cada medio en función de la amplitud del campo incidente.

   d) Calcule la presión ejercida en la superficie metálica en términos de la amplitud de la onda incidente.

   e) Verifique su solución usando los resultados del problema 5 a través de algún límite adecuado



10. Una onda plana linealmente polarizada de amplitud $\mathbf{E}_0$ incide normalmente desde el vacío sobre una lámina de espesor d de un muy buen conductor ($\delta << \lambda$). Puede asumirse que $\epsilon = \mu = 1$ en todo el espacio.

a) Demuestre que los campos reflejado y transmitido tienen las siguientes amplitudes relativas a la amplitud del campo incidente E_i

$$\frac{E_r}{E_i} \sim -\frac{(1-\gamma)(1-e^{-2\alpha})}{1-e^{-4d/\delta}+2\gamma e^{-2\alpha}} \qquad \frac{E_r}{E_i} \sim \frac{2\gamma e^{-\alpha}}{1-e^{-4d/\delta}+2\gamma e^{-2\alpha}}$$

donde $\gamma = (1-i)\delta\omega/c$ y $\alpha = (1-i)d/\delta$. Analice los casos $d = 0$ y $d \to \infty$.

b) Demuestre que siempre que el espesor de la lámina no sea muy pequeño, el coeficiente de traansmisión $T = |E_t/E_i|^2$ de la lámina conductora es aproximadamente:

$$T = \frac{8(\delta\omega/c)^2 e^{-2d/\delta}}{1+e^{-4d/\delta - 2e^{-2s/\delta}\cos(2d/\delta)}}$$

11. **Presión de radiación.** Hallar la presión de radiación producida por una onda plana que incide normalmente desde el vacío sobre un conductor perfecto. Verificar que es igual a la densidad de energía de la onda.

12. $\star$ Una onda plana de frecuencia ω incide normalmente desde el vacío en un medio con índice de refrección complejo $n(\omega)$, tal que $n^2(\omega) = \epsilon(\omega)/\epsilon_0$.

a) Mostrar que la onda reflejada cumple:

$$R = \left|\frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)}\right|^2 \tag{0.1}$$

y la transmitida

$$T = \frac{4\mathrm{Re}[\mathrm{n}(\omega)]}{|1+n(\omega)|^2}. \tag{0.2}$$

b) Evalue $\mathrm{Re}[\mathrm{i}\omega(\mathbf{E}.\mathbf{D}^* - \mathbf{B}.\mathbf{H}^*)/2]$ como función de (x, y, z). Muestra que la variación de energía por unidad de volumen corresponde al flujo de energía transmitido en el medio dieléctrico ($\mathrm{Re}(\vec{\nabla}.\vec{S})$).

c) Para un conductor con $n^2 = 1 + i(\sigma/(\omega\epsilon))$, con σ real, escriba los resultados obtenidos en (a) y (b) en el límite $\epsilon\omega << \sigma$ (escriba las expresiones en función de δ). Calcule $1/2\mathrm{Re}(\mathbf{J}^*.\mathbf{E})$ y compare con el resultado obtenido en (b). Interprete el resultado.