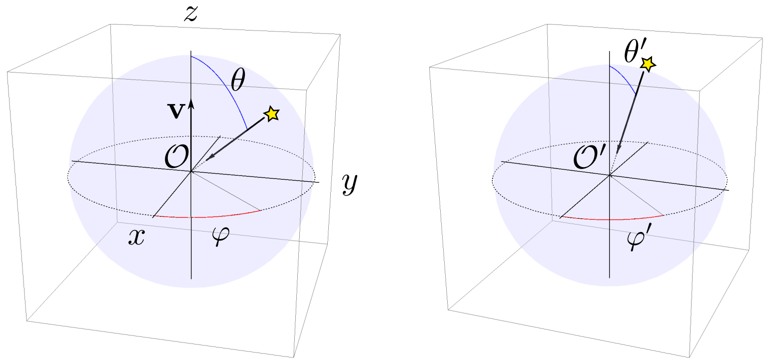
Formulación Covariante del Electromagnetismo

1. **Aberración relativista.** El observador $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad relativa $\vec{v}$ respecto de $\mathcal{O}$. En cierto instante, los dos observadores coinciden en el mismo punto del espacio. En ese momento, los dos reciben luz proveniente de una misma estrella muy lejana. Ambos observadores eligen su eje z en la dirección de $\mathbf{v}$, de modo que escribirán el vector de la velocidad de la luz recibida según expresiones análogas; el observador $\mathcal{O}$, por ejemplo, escribirá

$$\mathbf{c}_{\mathcal{O}} = -\big(\cos\varphi\,\sin\theta\,\hat{x} + \sin\varphi\,\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\big)\,c$$

Obviamente, $|\mathbf{c}_{\mathcal{O}}| = |\mathbf{c}_{\mathcal{O}'}| = c$.



a) Si $\mathcal{O}$ recibe la luz según la dirección definida por los ángulos θ y φ, aplicando las fórmulas de transformación de velocidades, muestre que, según $\mathcal{O}'$, la luz proviene de la dirección definida por los ángulos

$$\varphi' = \varphi, \qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta}. \qquad (\beta = v/c)$$

b) Deduzca estas mismas expresiones a partir de la transformación del cuadrivector número de onda.

c) Una fórmula importante, que puede deducir de lo anterior, relaciona las tangentes de los ángulos θ y θ'. Sabiendo que $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos x)$ y $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$, deduzca la *fórmula de aberración relativista*:

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\tan\frac{\theta}{2}.$$

d) Muestre que todas las estrellas en el hemisferio $0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$ de $\mathcal{O}$ estarán concentradas, según $\mathcal{O}'$, en cierto cono alrededor del eje z. ¿Qué pasa cuando β se acerca a 1?

e) El observador $\mathcal{O}$ ve una pequeña constelación triangular, cuyas 3 estrellas están en las direcciones

$$\hat{r} \to (\theta, \varphi), \qquad \hat{r}_1 \to (\theta + \delta\theta_1, \varphi + \delta\varphi_1), \qquad \hat{r}_2 \to (\theta + \delta\theta_2, \varphi + \delta\varphi_2).$$

Halle las posiciones de las mismas estrellas según $\mathcal{O}'$ a primer orden en los δ's. ¿Qué relación geométrica guardan entre sí los triángulos que definen la constelación, según sea vista por uno u otro observador? ¿Pasará lo mismo con figuras más complicadas, como las Pléyades, o más extensas, como Orión?

f) Para hacer en la computadora. El archivo adjunto [1] contiene las orientaciones de las 1000 estrellas más brillantes vistas desde la Tierra. Con esas estrellas, construya el mapa celeste para un observador relativista. Repita el experimento para valores crecientes de v. ¿Se comprueban o desmienten sus primeras intuiciones?

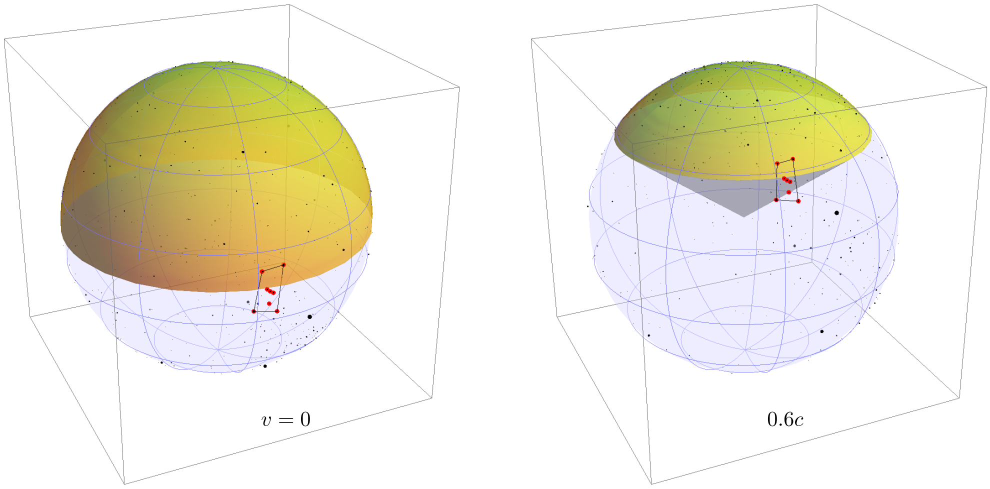
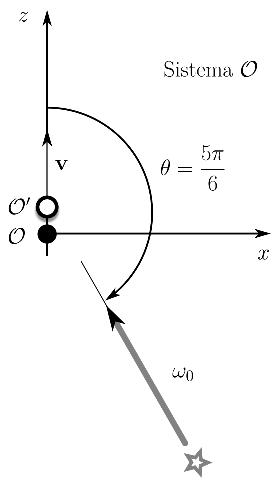


Figura 1: *
Un ejemplo de lo que debe obtenerse para el cielo del observador $\mathcal{O}'$ en las vecindades de la Tierra: $\mathcal{O}'$ se mueve en dirección a la estrella polar, con la velocidad indicada en cada caso. La sección sombreada abarca las estrellas del hemisferio superior del cielo de un observador en la Tierra. Se ha trazado el contorno de la constelación de Orión.

2. **Efecto Doppler relativista.** Los observadores $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ del ejercicio anterior reciben luz proveniente de una misma estrella muy lejana, de nombre Betelgeuse. Vista desde la Tierra, Betelgeuse tiene un característico color anaranjado, $\lambda_0 = 600$ nm; a todos los efectos prácticos puede considerarse una fuente monocromática, con la correspondiente frecuencia $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$, según $\mathcal{O}$. El observador $\mathcal{O}$ ve la estrella en $\varphi = 0$ y $\theta = 5\pi/6$, como muestra la figura.



a) Si ω' es la frecuencia vista por $\mathcal{O}'$, **graficar** ω'/ω_0 en función de $\beta = v/c$, para β entre 0 y 1. Indicar la posición del mínimo y el valor de ω'/ω_0 en ese punto.

[1] `http://materias.df.uba.ar/ft1a2015c2/files/2015/11/catalogo_de_estrellas.rar`. El formato es $(\varphi, \theta, \text{magnitud})$.

b) Asuma que las longitudes de onda visibles son las comprendidas entre 400 nm y 800 nm. Es decir, $\omega_{\text{max}} = \frac{3}{2}\omega_0$ y $\omega_{\text{min}} = \frac{3}{4}\omega_0$. Suponiendo que el observador $\mathcal{O}'$ acelera sucesivamente desde velocidad $v = 0$ hasta una velocidad arbitrariamente próxima a la de la luz, ¿para qué rango de velocidades es capaz de ver la estrella? Calcular la secuencia de valores de β para los cuales la estrella desaparece o aparece en el cielo de $\mathcal{O}'$.

Transformación de los campos

3. Un sistema inercial S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto de un sistema S. Puede asumirse que los ejes de los dos sistemas coinciden en $t' = t = 0$.

   a) Si en S se miden los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, encuentre $\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}')$ y $\mathbf{B}'(t', \mathbf{r}')$ en S'.

   b) Si en S se propaga una onda plana caracterizada por los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ y $\mathbf{B} = \hat{k} \times \mathbf{E}$, demuestre que en S' también se propaga una onda plana.

   c) Si en S se miden los campos estáticos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, encuentre los campos en S' en los siguientes casos: 1) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \mid\mid \mathbf{v}$; 2) $\mathbf{B} = 0$, $\vec{E} \perp \mathbf{v}$; 3) $\vec{E} = 0$, $\mathbf{B} \mid\mid \mathbf{v}$; 4) $\vec{E} = 0$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$. Proponga ejemplos para cada situación.

4. *¿Verdadero o Falso?* En un sistema S, en cierto instante de tiempo y cierto punto del espacio se miden campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

   a) Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares, lo mismo sucede en cualquier otro sistema inercial.

   b) La relación de orden entre $|\mathbf{E}|$ y $|\mathbf{B}|$ es la misma en todos los sistemas.

   c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético.

5. En un sistema de referencia inercial S, el campo eléctrico forma un ángulo θ con el campo magnético. Ambos campos son uniformes y estáticos.

   a) Encontrar un sistema de referencia S' tal que los campos sean paralelos.

   b) Si en S los módulos de los campos cumplen $B_0 = 2E_0$, calcular los campos en el sistema de referencia hallado en (a). Tomar el límite para $\theta \ll 1$ y para $\theta \to \pi/2$.

6. Un cilindro circular macizo y de longitud infinita tiene densidad de carga y de corriente uniformes. La corriente es paralela al eje del cilindro. Encontrar un sistema de referencia en el cual sólo hay campo magnético o eléctrico. ¿Es único?

7. Una lámina plana infinita tiene densidad de carga superficial constante σ y se encuentra en reposo en cierto sistema inercial S.

   a) Hallar los campos eléctrico y magnético en un sistema que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ constante paralela a la lámina

      1) por transformación directa de los campos;

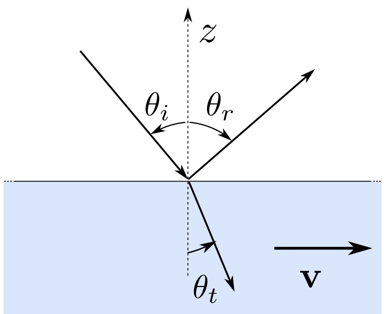
      2) a partir de la transformación de las fuentes.

b) ¿Qué campo eléctrico y magnético verá un observador que se mueve con velocidad constante perpendicular a la lámina?

8. *a*) Un cilindro circular infinito está cargado uniformemente en volumen. Calcular los campos en un sistema de referencia que se mueve paralelo al cilindro. Primero, a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, y luego por transformación de los campos.

   b) Ahora hay dos barras como la anterior, dispuestas una paralela a la otra. Demostrar que la fuerza por unidad de longitud sobre cualquiera de las barras, medida en un sistema de referencia S' que se mueve paralelo a ellas, es la misma que en el sistema S en el que las barras están en reposo. Demostrarlo primero a partir de la fuerza de Lorentz y de los campos en S', y luego demostrando que el objeto $f^\mu \equiv \frac{1}{c} F^\mu_{\ \nu} j^\nu$ es el cuadrivector que es la generalización covariante de la densidad de fuerza. Como "yapa" del segundo método, obtener la ley de transformación relativista para la potencia disipada por efecto Joule.

9. *Fresnel relativista.* En el sistema de laboratorio, una onda plana, de frecuencia ω y amplitud $\mathbf{E}$, incide desde el vacío sobre la superficie de un líquido de índice de refracción n y $\mu = 1$. El líquido ocupa el semiespacio $z < 0$ y se mueve con velocidad v paralela a su superficie. En el laboratorio, la polarización de la onda puede ser TE o TM. Encuentre la dirección, la amplitud, la polarización y la frecuencia de las ondas transmitidas y reflejadas en el sistema de laboratorio.



10. Una nave sobrevuela paralelamente con velocidad v el océano en calma de un planeta de enorme tamaño. El índice de refracción del océano es n (con $\mu = 1$), y el índice de refracción de la atmósfera puede tomarse igual al del vacío. Para medir su altitud, la nave envía constantemente una onda plana contra la superficie del océano. En el sistema de referencia que se mueve con la nave, la onda plana viaja perpendicularmente hacia la superficie del océano y su campo eléctrico tiene módulo E_0 y es paralelo a la velocidad relativa entre la superficie y la nave.

    a) ¿Para qué valor de v la nave no recibe ninguna onda reflejada?

    b) Calcule la intensidad de la onda reflejada recibida por la nave como función de v.

11. Un dipolo magnético puntual $\mathbf{m}$ se encuentra en reposo en el origen de un sistema S', por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = 0$ y $\mathbf{A}' = \mathbf{m} \times \mathbf{r}'/r'^3$. El sistema S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema de laboratorio S.

a) Demostrar que en S los potenciales a primer orden en β son

$$\Phi = \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{m})\cdot\mathbf{R}}{c\,R^3}, \qquad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R^3},$$

con $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)$, donde $\mathbf{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S.

b) Encontrar los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en S, a primer orden en β, transformando directamente los campos $\mathbf{E}'=0$ y $\mathbf{B}'$ del sistema S'. Comparar con las expresiones anteriores.

12. Encontrar la trayectoria de una partícula cargada en cada caso:

a) La partícula parte desde el origen a $t=0$ con impulso $\mathbf{p}=p_0\,\hat{y}$ en un campo eléctrico uniforme y estático $\mathbf{E}=E\,\hat{x}$.

b) Movimiento en un campo magnético estático y uniforme.

c) Movimiento en campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, estáticos y uniformes, tales que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$. Analizar por separado cada uno de los siguientes casos $E<B, B<E, E=B$.