Radiación

1. Una partícula no relativista de carga Ze, masa m y energía cinética inicial $\mathcal{E}$ incide frontalmente desde el infinito sobre un centro de fuerzas fijo en el origen. La interacción es repulsiva y está descripta por un potencial $V(r)$ que es mayor que $\mathcal{E}$ a distancias suficientemente cercanas al origen y que decae a cero en el infinito.

   a) Mostrar que la energía total radiada está dada por

   $$\Delta W = \frac{4}{3}\frac{Z^2e^2}{m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\min}}^{\infty} dr\, \frac{V'(r)^2}{\sqrt{V(r_{\min}) - V(r)}},$$

   donde $r_{\min}$ es la distancia de máximo acercamiento al centro de fuerzas. (Jackson)

   b) Si la interacción es Coulombiana, $V(r) = ZZ'e^2/r$, mostrar que la energía total irradiada es

   $$\Delta W = \frac{8}{45}\frac{Zmv_0^5}{Z'c^3},$$

   donde v_0 es la velocidad de la carga incidente en el infinito.

   c) Como caso particular, considerar un positrón que incide sobre un protón. Si la velocidad inicial del positrón en el infinito es v_0, estimar su velocidad final como resultado de la pérdida de energía por radiación, despreciando el movimiento del protón. ¿Cómo está polarizada la radiación? Despreciando ahora los efectos de la pérdida de energía por radiación, pero teniendo en cuenta la masa finita del protón, estimar la velocidad final del positrón. Compare los dos resultados para la velocidad final.

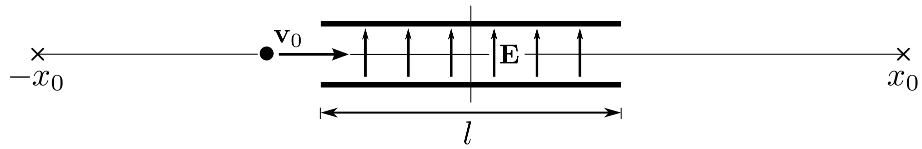
2. *a*) Una partícula de carga $-e$ y masa m gira alrededor de otra mucho más pesada de carga Ze. El radio de la órbita circular es inicialmente R. Calcular el tiempo que tarda la partícula más liviana en caer al centro debido a la pérdida de energía por radiación, y calcular el número de vueltas que realiza antes de caer. Asumir que el movimiento es no relativista y que la energía radiada por ciclo es mucho menor que la energía potencial de la partícula en movimiento circular. Recordar que para una órbita circular en un potencial atractivo de la forma $-\alpha/r$, la energía total (sin considerar la energía en reposo mc^2) es igual a 1/2 de la energía potencial.

   b) Calcular el tiempo de caída y el número de vueltas en el caso de un electrón orbitando alrededor de un protón. Inicialmente el electrón se mueve en una órbita circular correspondiente al radio de Bohr. Datos: $m_ec^2 = 511$ keV, energía de ionización $= 13{,}6$ eV, radio de Bohr $= 5{,}3 \times 10^{-11}$ m, $c = 3 \times 10^8$ m/s. ¿Qué falla primero, la aproximación no relativista o la aproximación de energía radiada por ciclo mucho menor que la energía potencial?

3. Una partícula relativista de carga q y masa m pasa a través de un capacitor de placas paralelas de longitud l. El campo $\mathbf{E}$ en el interior del capacitor es homogéneo y constante. La partícula ingresa al capacitor con una velocidad $\mathbf{v}_0$ perpendicular a $\mathbf{E}$ y paralela a las placas, y viaja tan rápido que su desviación puede despreciarse.

   a) Calcule la energía total irradiada durante el paso de la partícula por el capacitor.

   b) Escriba la expresión del campo eléctrico de **radiación** y grafíquelo cualitativamente en función del tiempo para los puntos $-x_0$ y x_0, que se encuentran sobre la línea que sigue



la partícula, simétricos respecto del centro del capacitor y **muy alejados** de éste. Tenga especial cuidado en el cálculo de los intervalos temporales en que ese campo es distinto de cero.

4. Este problema es la versión relativista del problema 1. Una partícula relativista de carga q y masa m que se mueve sobre el eje x incide sobre una partícula de carga Q fija en el origen. Las dos cargas tienen el mismo signo. Inicialmente, en $x \to \infty$ y $t \to -\infty$, la partícula de masa m está caracterizada por un factor relativista γ_0.

   a) Demuestre primero que para una partícula de masa m y carga q
   $$m\gamma(\vec{v})\dot{\vec{v}} = q\Big[\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} - \left(\vec{\beta} \cdot \vec{E}\right)\vec{\beta}\Big].$$
   Esta fórmula se usa mucho en los problemas relativistas para obtener $\dot{\mathbf{v}}$.

   b) Encuentre x como función de γ. ¿Cuál es la distancia de máximo acercamiento?

   c) Encuentre $\dot{v}$ como función de γ.

   d) Encuentre $\dot{\gamma}$ como función de γ.

   e) Escriba la potencia radiada como función de γ.

   f) Escriba la energía total radiada como una integral, $\Delta W = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma\, f(\gamma)$, dando los valores de γ_1, γ_2 y la función f en términos de los datos del problema.

5. Para todos los sistemas que se enumeran más abajo:

   - Calcular los campos de radiación **E** y **B** hasta orden dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.
   - Graficar cualitativamente **E** y **B** sobre la superficie de una esfera.
   - Calcular la potencia por unidad de ángulo sólido y graficar su promedio temporal en función de la dirección.
   - Calcular la potencia total emitida en todas las direcciones y su promedio temporal.
   - Indicar la frecuencia angular de la radiación emitida.

   a) Una carga q que gira en una órbita circular de radio a con frecuencia angular ω.

   b) Dos cargas q y $-q$ separadas una distancia d que giran diametralmente opuestas en el plano xy con frecuencia angular ω.

   c) Ídem al anterior pero ahora para dos cargas iguales de valor q.

   d) Un anillo circular cuyo radio es una función del tiempo $a(t) = r_0 \cos^2 \omega t$. El anillo tiene carga q distribuida uniformemente.

   e) Un dipolo magnético **m** que rota con velocidad angular ω. El ángulo entre **m** y ω es α.

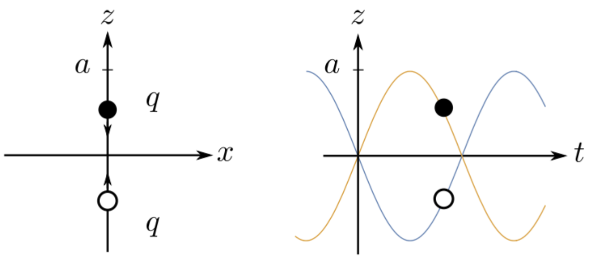
6. Dos cargas de valor q se mueven sobre el eje z, como muestra la figura. La posición de una de las cargas es $z(t) = a \sin \omega t$, y la posición de la otra es $-z(t)$.

   a) Calcular los campos de radiación $\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t)$ y $\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t)$ incluyendo los términos dipolar eléctrico, dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.

   b) Graficar $\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t)$ y $\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t)$ sobre la superficie de una esfera. Grafique cada orden por separado. Elija puntos representativos, indique esquemáticamente la evolución de cada campo.

   c) Calcular la potencia media por unidad de ángulo sólido. Graficar en función de la dirección.

   d) Calcular la potencia media total emitida en todas direcciones.



7. Se tiene un conductor recto y delgado de longitud l alimentado por una fuente de frecuencia ω localizada en su centro. Se desprecia la resistencia. Calcular la potencia irradiada por unidad de ángulo sólido y la potencia total irradiada. Determinar en qué dirección es mínima la radiación, y cómo es la polarización de la radiación en esa dirección.

8. Resuelva el problema anterior pero en el caso de tener una espira circular de radio a con corriente $I = I_0 \sin(\omega t)$.

Ejercicios optativos relacionados con temas extras de la teórica

9. $\star$ Demostrar que la onda de choque electromagnética emitida por un electrón que se mueve a velocidad v mayor que la velocidad de la luz en un medio con índice de refracción n ($v > c/n$) se concentra formando un ángulo θ_c respecto de la dirección de movimiento de la partícula tal que $\cos \theta_c = c/(nv)$. Este proceso recibe el nombre de radiación de Cerenkov.

10. $\star$ Una carga está sujeta a un resorte de forma tal que puede ser considerada como una partícula con movimiento oscilante. Se quiere ver que las pequeñas pérdidas radiativas pueden ser descriptas introduciendo una fuerza disipativa proporcional a la tercera derivada de la elongación.