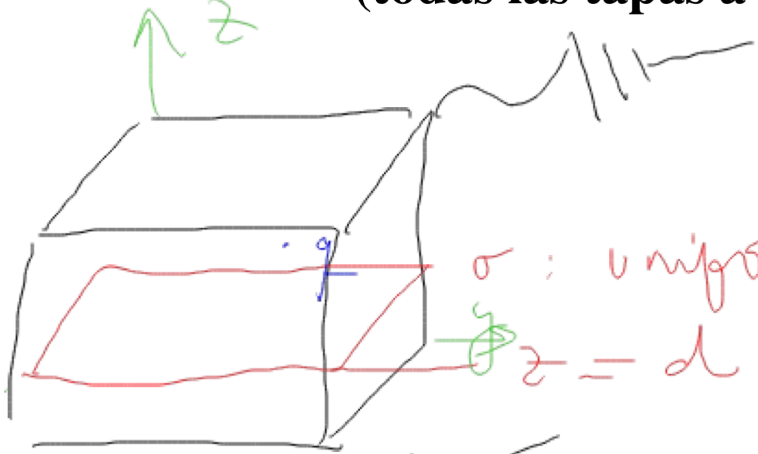
Calular Φ en el interior del cubo a tierra con q y σ adentro

(todas las tapas a tierra)

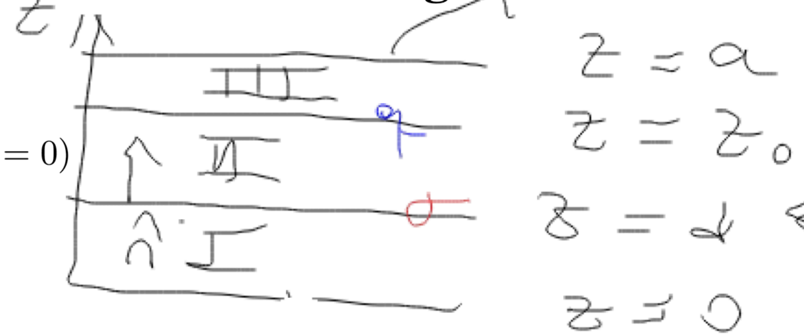
P3)



q en (x_0, y_0, z_0)

Método 1: Dividir en 3 regiones donde vale Laplace + condiciones de contorno:

$(\nabla^2 \Phi_{\mathrm{I,II,III}} = 0)$



$$\begin{cases} \phi_{I}(d) = \phi_{II}(d) \\ \left(\vec{E}_{II} - \vec{E}_{I}\right)\Big|_{z=d} \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma \end{cases}$$

En $z = z_0$,

$$\begin{cases} \phi_{II}(z_0) = \phi_{III}(z_0) \\ \left[-\partial_z \phi_{III} - (-\partial_z \phi_{II})\right]\Big|_{z=z_0} = 4\pi\,\sigma_q \end{cases}$$

Resumen de las condiciones de contorno para resolver el potencial en el interior del cubo dividiendo en 3 regiones:

En cada región (abierta) vale Laplace:

$$\nabla^2 \Phi_{\mathrm{I,II,III}} = 0$$

$$\Phi_{\mathrm{I,II,III}}\big|_{x=0} = 0$$
$$\Phi_{\mathrm{I,II,III}}\big|_{x=a} = 0$$

condiciones de contorno “triviales” en x
(en las 3 regiones)

$$\Phi_{\mathrm{I,II,III}}\big|_{y=0} = 0$$
$$\Phi_{\mathrm{I,II,III}}\big|_{y=a} = 0$$

condiciones de contorno “triviales” en y
(en las 3 regiones)

$$\Phi_{\mathrm{I}}\big|_{z=0} = 0$$
$$\Phi_{\mathrm{III}}\big|_{z=a} = 0$$

potencial a tierra en las tapas de arriba y de abajo

(continuidad) $\Phi_{\mathrm{I}}\big|_{z=d^-} = \Phi_{\mathrm{II}}\big|_{z=d^+}$

(salto de derivada normal) $\partial_z \Phi_{\mathrm{I}}\big|_{z=d^-} - \partial_z \Phi_{\mathrm{II}}\big|_{z=d^+} = 4\pi\, \sigma$

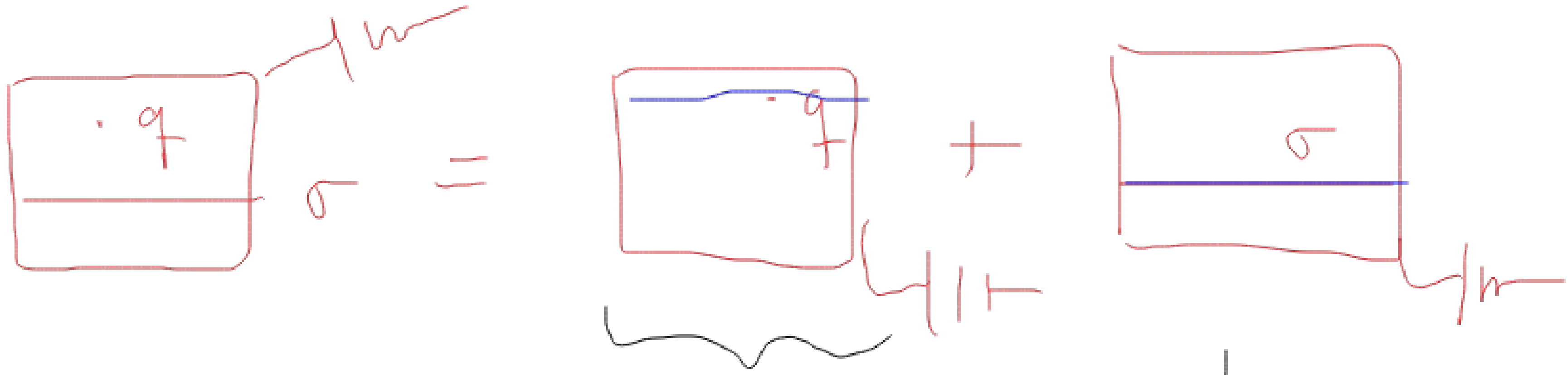
Empalme en superficie z=d

(continuidad) $\Phi_{\mathrm{II}}\big|_{z=z_0^-} = \Phi_{\mathrm{III}}\big|_{z=z_0^+}$

(salto de derivada normal) $\partial_z \Phi_{\mathrm{II}}\big|_{z=z_0^-} - \partial_z \Phi_{\mathrm{III}}\big|_{z=z_0^+} = 4\pi\, q\, \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$

Empalme en superficie z=z0

Método 2: Superposición

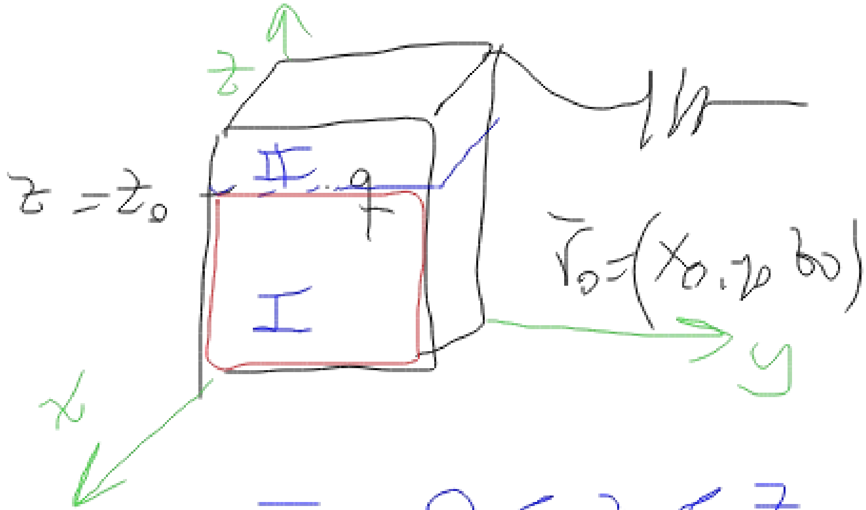


$$\phi = \boxed{\phi_q} + \phi_\sigma$$

A continuación resolvemos el problema de éste primer término de la superposición (carga puntual dentro del cubo a tierra)

Carga puntual dentro del cubo a tierra:

$$\phi_q = \begin{cases} \phi_{II} & \text{en } II \\ \phi_{I} & \text{en } I \end{cases}$$



$I: \; 0 \leq z \leq z_0$

$II: \; z_0 \leq z \leq a$

Empalme en $z = z_0$:

Continuidad del potencial:

$$\phi_I(z = z_0) = \phi_{II}(z = z_0)$$

Salto del campo normal:

$$\left[-\bar{\nabla}\phi_{II} - (-\bar{\nabla}\phi_I) \right] \cdot \hat{z} \Big|_{z_0} = 4\pi \sigma_q = 4\pi q \, \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$$

$$-\partial_z \phi_{II}\Big|_{z_0^+} + \partial_z \phi_I\Big|_{z_0^-} = 4\pi \sigma_q$$

base de senos en "x" e "y"
(direcciones en donde se cumple Sturm-Liouville
con condiciones de contorno triviales,
ver P1 de la 1ra parte de la clase)

$$\phi_q = \sum_{n,m} \boxed{s(k_n x)\, s(k_m y)} \begin{cases} Z^{II}_{nm} \\ Z^{I}_{nm} \end{cases}$$

$$k_n = \frac{\pi n}{a}, \quad k_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$Z_{nm} = \begin{cases} \frac{A^{II}}{sh(\gamma z_0)} sh[\gamma(a-z)]\, sh(\gamma z_0) \\ \frac{A^{I}_{nm}}{sh(\gamma z_0)} sh(\gamma_{nm} z)\, sh[\gamma(a-z_0)] \end{cases}$$

A

redefinición de los coeficientes
(no se escribió las etiquetas
n y m para sintetizar)

continuidad del potencial en z=z0 : $\phi_I(z_0) = \phi_{II}(z_0) \Rightarrow A^{I}_{nm} = A^{II}_{nm} \frac{sh[\gamma(a-z_0)]}{sh\,\gamma z_0} = A\, sh[\gamma(a-z_0)]$

salto del campo normal en z=z0 : $\sum s(k_n x)\, s(k_m y)\, \gamma A \left\{ \underbrace{ch[\gamma(a-z_0)]\, sh\,\gamma z_0 + ch\,\gamma z_0\, sh[\gamma(a-z_0)]}_{sh[\gamma(a-\cancel{z_0}+\cancel{z_0})]} \right\} = 4\pi\sigma_q(x,y)$

$$\sum s(k_n x)\, s(k_m y)\, sh(\gamma a)\, \gamma A = 4\pi q\, \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)$$

ortogonalización: $\int_0^a dx\, s(k_{n'} x) \int_0^a dy\, s(k_{m'} y) \{ \quad \}$

despeje de coeficientes: $A_{nm} = \frac{16\pi q\, s(k_n x_0)\, s(k_m y_0)}{a^2\, \gamma_{nm}\, sh(\gamma_{nm} a)}$

$$\boxed{\phi_q = \sum_{n,m=1}^{\infty} s(\;)\, s(\;)\, A_{nm}\, sh[\gamma_{nm}(a-z_>)]\, sh(\gamma_{nm} z_<)}$$

k_n, k_m

γ_{nm}

$z_> = \text{Max}\{z, z_0\}$

$z_< = \min\{z, z_0\}$