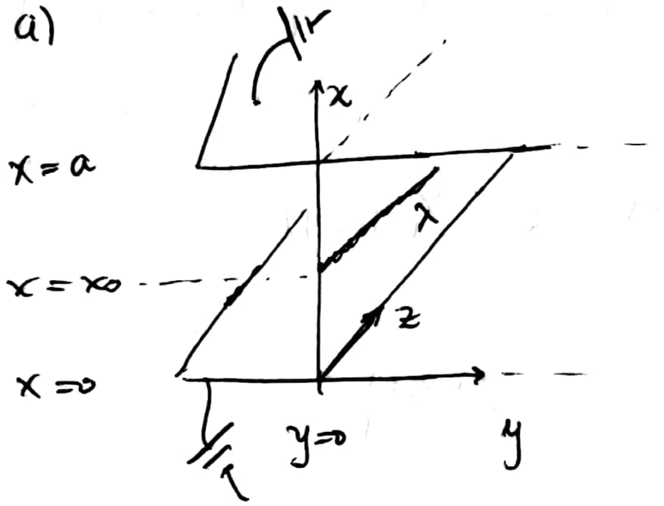
P4)

a)



$$\rho(\bar r) = \delta(y)\cdot\sigma_y(x,z)$$

$$\sigma_y(x,z) = \lambda\cdot\delta(x-x_0)$$

$\Downarrow$

sim. traslación en z

$\therefore \quad \partial_z\phi = 0$

I : $y \leq 0$
II : $y \geq 0$

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\infty < z < +\infty$

$\nabla^2\phi_{I,II} = 0$ en los abiertos (I), (II)

$\Rightarrow \phi \sim \sum_i^4 u_i$ con $u_i \sim X(x)\,Y(y)\,Z(z)$

condiciones de contorno:

[1]: $\phi_{I,II}\big|_{x=0} = 0 = \phi_{I,II}\big|_{x=a} \Rightarrow$ pueden garantizar base en dirección "x".

$\phi_I\big|_{y\to-\infty} \longrightarrow 0$ [2] ; $\phi_{II}\big|_{y\to+\infty} \longrightarrow 0$ [3]

Empalme en sup. $y=0$: continuidad: $\phi_I\big|_{y=0} = \phi_{II}\big|_{y=0}$ [4]

salto. $\partial_y\phi_I\big|_{y=0^-} - \partial_y\phi_{II}\big|_{y=0^+} = 4\pi\,\sigma_y(x,z)$ [5]

Obs.

- El Empalme en $y=0$ no me permite garantizar un conjunto de funciones base para usar en dirección "y".
- Uso base trigonométrica para $Z(z)$ [ignoro la independencia en 'z'] que sirve para cualquier función $\mathbb{L}^2$ integrable (y algo más) que eso tmb.

$\therefore$

$$X_n(x) \sim \{\sin(k_n x), \cos(k_n x)\} \quad ó \quad \{e^{\pm i k_n x}\}$$

$$Z(k;z) \sim \{\sin kz, \cos kx\} \quad o \quad \{e^{\pm ikz}\}$$

Obs: k ahora es continuo en dir. z:

$$\delta k = k_{m+1} - k_m = [(m+1) - m]\frac{\pi}{L_z} = \frac{\pi}{L_z} \xrightarrow{(L_z \to \infty)} dk \text{ continuo}$$

$$\Rightarrow \text{“}\sum\text{”} \frac{\pi}{L_z} \longrightarrow \int dk$$

$$\phi = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)}_{\text{son la base en 'x'}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; e^{ikz} \; Y_n(k;y)$$

dadas las c. de c. [1]

vínculo de sep. de variable

$$Y_n(k;y) = \begin{cases} Y_n^{I}(k;y) = A_n^{I}(k)\, e^{\gamma y} + B_n^{I}(k)\, e^{-\gamma y} \\ Y_n^{II}(k;y) = A_n^{II}(k)\, e^{\gamma y} + B_n^{II}(k)\, e^{-\gamma y} \end{cases} \qquad \left(\gamma \equiv \gamma_n(k) = \sqrt{k_n^2 + k}\right)$$

4 familias de coefs. incógnita y 4 c. de c restantes.

$$\phi_{I}\big|_{y\to-\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_n^{I} = 0}$$

$$\phi_{II}\big|_{y\to+\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_n^{II} = 0}$$

continuidad en $y=0$

$$\sum s() \int e^{ikz} \left\{ A_n^{I}(k)\, \cancel{e^{\gamma y}} - B_n^{II}(k)\, \cancel{e^{-\gamma y}} \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{A_n^{I} = B_n^{II} \doteq C_n(k)}$$

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} s(k_n x) \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikz}\, C_n(k) \cdot e^{-\gamma_n(k)\cdot|y|}$$

salto:

$$\sum s() \int e^{()}\, C_n(k)\, \gamma\, \cancel{\{+1+1\}} = \frac{4\pi}{2}\lambda\, \delta(x-x_0)$$

$$\int_0^a dx \cdot \sin(k_{n'} x) \Big[\qquad = \qquad \Big\} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2} \delta_{nn'} \int dk\, e^{ikz}\, C_n(k)\, \gamma = 2\pi\lambda \sin(k_{n'} x_0)$$

$$\frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikz}\, C_{n'}(k)\, \gamma_{n'}(k) = 2\pi\lambda\, s(k_{n'} x_0)$$

• ortogonalidad base exponencial:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, e^{-k'zi} \Big\{ \qquad = \qquad \Big\} ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, e^{iz(k-k')} = 2\pi\delta(k-k')$$

$$\cancel{2\pi}\, \frac{a}{2} C_{n'}(k')\, \gamma_{n'}(k') = 2\pi\lambda\, s(k_{n'} x_0)\, \cancel{2\pi} \cdot \delta(k')$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_n(k) = 4\pi \frac{\lambda}{a} \frac{s(k_n x_0)}{\gamma_n(k)} \cdot \delta(k)}$$

∴

$$\phi = \sum s(\,) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dk \cdot e^{ikz}\, \delta(k)\, e^{-\gamma|y|} \cdot \breve{C}_n(k)}$$

$$\gamma_n(0) = |k_n| \ , \quad \breve{C}_n(0) = \frac{4\pi\lambda}{a} \frac{\sin(k_n x)}{k_n} \quad k_n = \frac{n\pi}{a}$$

$(k_n > 0)$

$$\boxed{\phi = 4\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) \sin(k_n x_0) \cdot \frac{e^{-k_n|y|}}{n}}$$

: indep de z ~~por~~ sim trasl.

(problema 2d)

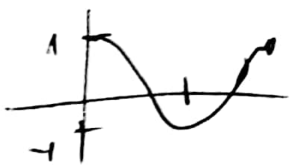
(si $x_0 = \frac{a}{2}$) ⇒ sim. reflex $x = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow \phi(x) = \phi(\underbrace{Rx}_{x' = -x+a}) \sim \underbrace{\sin[k_n(a-x)]}_{s(k_n a) c(k_n x) - s(k_n x) c(k_n a)} = (-1)^{n+1} s(k_n x)$$

$s(k_n a) = 0$, $c(k_n a) = (-1)^n$

Pero además:

si $x_0 = \frac{a}{2}$: $\sin\left(k_n \frac{a}{2}\right) = s\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ impar} \\ \boxed{0 \text{ si } n \text{ par}} \end{cases}$

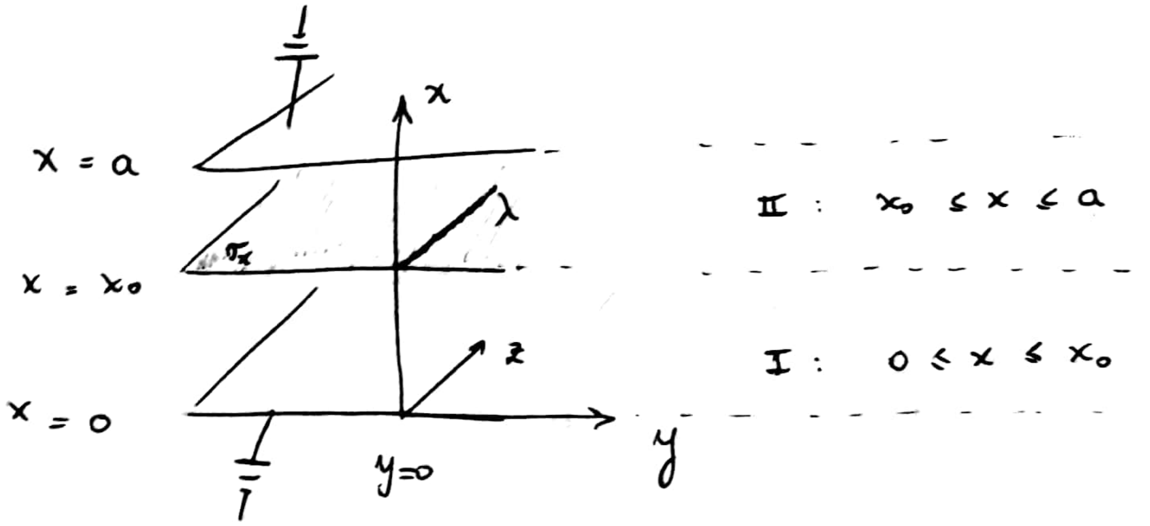


$n = 2m+1 \quad (-1)^m = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$; $(-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{impar} \\ -1 & \text{par} \end{cases}$ ✓

$$\boxed{\phi = 4\lambda \sum_{n=1}^{\text{impares}} \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e^{-n\pi|y|/a}}{n}}$$

Par en y (reflexión respecto $y=0$)

b)



$$\underbrace{\rho(\vec{r})} = \delta(x-x_0)\,\sigma_x(y,z) \quad ; \quad \sigma_x(y,z) = \lambda\,\delta(y)$$

sim. trasl. $z \Rightarrow \partial_z \phi = 0$

En I, II vale $\nabla^2\phi_{I,II} = 0 \Rightarrow \phi \sim \sum_i^{\infty} u_i$
(abiertos)

$$u_i \sim X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

condiciones de contorno:

$\phi_I\big|_{x=0} = 0$: [1] ; $\underbrace{\phi_{I,II} \xrightarrow{y\to\pm\infty} 0}_{\circledast}$;

$\phi_{II}\big|_{x=a} = 0$: [2]

Obs. No usaré base en "x"

Empalme en $x=x_0$:

$\phi_I(x_0^-) = \phi_{II}(x_0^+)$: [3]

$\partial_x\phi_I\big|_{x_0^-} - \partial_x\phi_{II}\big|_{x_0^+} = 4\pi\sigma_x$: [4]

Obs: • No hay dependencia en z. Problema bidimensional
$\Rightarrow$ sólo hace falta base en una dirección.

• Por $\circledast$ podemos garantizar base trigonométrica en "y".

$$\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; e^{iky} \, \chi(k;x)$$

$$\chi(k;x) = \begin{cases} A^{II}(k)\, sh\left[k(a-x)\right] + B^{II}(k)\, ch(kx) & \text{en } II \\ A^{I}(k)\, sh(kx) + B^{I}(k)\, ch(kx) & \text{en } I \end{cases}$$

Por [1] $\Rightarrow$ $\boxed{B^{I} = 0}$; Por [2] $\Rightarrow$ $\boxed{B^{II} = 0}$

Por [3] :

$$\underbrace{\frac{A^{II}}{sh(kx_0)}} sh\left[k(a-x_0)\right] = A^{I} \cancel{sh(kx_0)}$$

defino $A(k) = \dfrac{A^{II}(k)}{sh(kx_0)}$ $\Rightarrow$

$$\chi(k;x) = \left\{ \begin{matrix} A(k)\, sh(kx_0)\, sh\left[k(a-x)\right] \\ A(k)\, sh(kx)\, sh\left[k(a-x_0)\right] \end{matrix} \right\} = A(k)\, sh(kx_<)\, sh\left[k(a-x_>)\right]$$

$x_{\gtrless} = Max/Min\{x, x_0\}$

Aplico [4] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk\; e^{iky} A(k)\, k \underbrace{\left\{ch(kx_0)sh[\;] + sh(kx_0)ch[\;]\right\}}_{\sinh\left[k(a-\cancel{x_0}) + \cancel{kx_0}\right]} = 4\pi \underbrace{\sigma_x(y)}_{\lambda\,\delta(y)}$$

$$\sigma_x(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\; e^{iky}\, \tilde{\sigma}_x(k) \quad ; \quad \tilde{\sigma}_x(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \frac{e^{-iky}}{2\pi}\, \sigma_x(y)$$

Igualando coef. a coef. del desarrollo de Fourier:

$$A(k) = \frac{4\pi \cdot \tilde{\sigma}_x(k)}{k \cdot \sinh(ka)} = \frac{2\lambda}{k\, sh(ka)}$$

c.a.

$$\tilde{\sigma}_x(k) = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\circledast = \frac{\chi(k;x)}{2\lambda}$$

$$\phi = 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk\; e^{iky} \cdot \overbrace{\frac{sh(kx_<)\, sh[k(a-x_>)]}{k \cdot sh(ka)}}^{\circledast}$$

$x_< = \min\{x, x_0\}$, $x_> = \max\{x, x_0\}$

chequeos: unidades, simetrías (si $x_0 = a/2 \Rightarrow$ reflexión $x = a/2$), c.de.c., $\phi \in \mathbb{R}$.

Vemos que $\phi \in \mathbb{R}$:

- $$e^{iky} = \underbrace{\cos(ky)}_{\text{par respecto a } k} + i\,\overbrace{\sin(ky)}^{\text{impar respecto a } k}$$

- como $\circledast$ es función par respecto a k $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ky)\, \circledast\, dk = 0$

$\therefore$

$$\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \cos(ky)\, \chi(k;x) \quad \in \mathbb{R} \checkmark$$

(y par respecto a "y")

$$= 2\int_0^{+\infty} dk\, \cos(ky)\, \chi(k;x)$$

Obs:

(i) $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \sin(k'x)\sin(kx) = \pi \cdot \delta(k-k') \quad \text{si } k>0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \cos(k'x)\cos(kx) = \pi \cdot \delta(k-k') \quad \text{si } k>0$$

(ii) $$\underbrace{\int_{0}^{+\infty}}\, dx \, \sin(k'x)\sin(kx) = \frac{\pi}{2}\delta(k-k'), \quad k>0$$

en una región semi-infinita en dirección "x" con $\phi(x=0)=0$, necesito una base de $\sin(kx)$ con $k>0$, esta ortogonalización de las funciones.