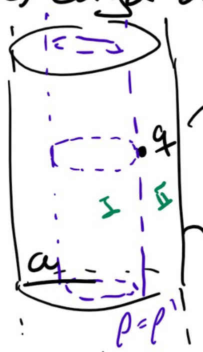
Física Teórica 1, 2do cuatrimestre 2021

Clase 15/9: Guía 2, separación en cilíndricas

15) Función de Green con c.c. de Dirichlet en el interior y exterior de un cilindro infinito

a) Carga en el interior, corto con cilindro coaxial



Tomo base en direcciones φ, z

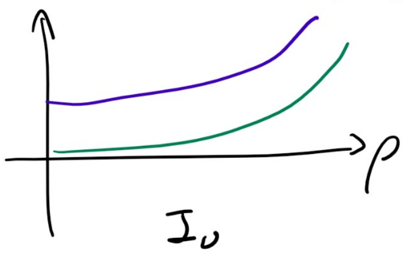
Elemento general de la base:

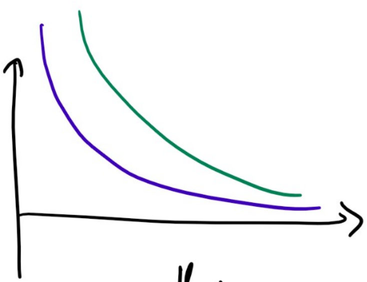
$$\phi = A e^{i\nu\varphi} e^{ikz} \left(B\, I_\nu(k\rho) + C\, K_\nu(k\rho) \right) \quad \text{(versión compleja)}$$

$$\phi = \left[A\cos(\nu\varphi) + B\,\mathrm{sen}(\nu\varphi) \right]\left[C\cos(kz) + D\,\mathrm{sen}(kz) \right]\left[E\, I_\nu(k\rho) + F K_\nu(k\rho) \right]$$
(versión real)

Por simetría en la parte angular sólo deberían quedar términos $\cos[\nu(\varphi-\varphi')]$

Funciones de Bessel modificadas:





→ en la región interior sólo uso I_ν para que no diverjan en el origen

$$\boxed{\phi_I = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A_\nu(k)\, I_\nu(k\rho)\, e^{i\nu\varphi} e^{ikz}}$$

En la región exterior en principio puedo tener ambos:

$$\phi_{II} = \sum_\nu \int dk \left[B_\nu(k) I_\nu(k\rho) + C_\nu(k) K_\nu(k\rho) \right] e^{i\nu\varphi} e^{ikz}$$

pero falta la c.c. $\phi(\rho=a)=0$

$$\Rightarrow B_\nu(\kappa)\, I_\nu(\kappa a) + C_\nu(\kappa) K_\nu(\kappa a) = 0 \Rightarrow C_\nu(\kappa) = -\frac{I_\nu(\kappa a)}{K_\nu(\kappa a)} B_\nu(\kappa)$$

$$\Rightarrow \phi = \sum_\nu \int d\kappa \; \underbrace{B_\nu(\kappa)\left[I_\nu(\kappa\rho) - \frac{I_\nu(\kappa a)}{K_\nu(\kappa a)} K_\nu(\kappa\rho)\right]}_{} e^{i\nu\varphi} e^{i\kappa z}$$

$$= \frac{B_\nu(\kappa)}{K_\nu(\kappa a)} \left[K_\nu(\kappa a) I_\nu(\kappa\rho) - I_\nu(\kappa a) K_\nu(\kappa\rho)\right]$$

lo redefino como $B_\nu(\kappa)$

Finalmente
$$\boxed{\phi_{II} = \sum_\nu \int d\kappa \; B_\nu(\kappa)\left[K_\nu(\kappa a) I_\nu(\kappa\rho) - I_\nu(\kappa a) K_\nu(\kappa\rho)\right] e^{i\nu\varphi} e^{i\kappa z}}$$

$$\boxed{\phi_I = \sum_\nu \int d\kappa \; A_\nu(\kappa)\, I_\nu(\kappa\rho)\, e^{i\nu\varphi} e^{i\kappa z}}$$

Continuidad en la interfaz: $\phi_I(\rho=\rho') = \phi_{II}(\rho=\rho')$

Como las funciones $e^{i\nu\varphi} e^{i\kappa z}$ son una base, la igualdad se aplica término a término:

$$A_\nu(\kappa)\, I_\nu(\kappa\rho') = B_\nu(\kappa)\left[K_\nu(\kappa a) I_\nu(\kappa\rho') - I_\nu(\kappa a) K_\nu(\kappa\rho')\right] \quad (1)$$

Salto de la derivada normal: $\sigma = q \dfrac{\delta(\varphi-\varphi')}{\rho'} \delta(z-z')$

$$\left(E_\rho^{II} - E_\rho^{I}\right)\Big|_{\rho=\rho'} = 4\pi\sigma$$

$$\left(\frac{\partial\phi_I}{\partial\rho} - \frac{\partial\phi_{II}}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=\rho'} = 4\pi\sigma$$

Recordemos que $\int dA\, \sigma = q$

El elemento de superficie es $\rho' d\varphi\, dz$

$\Rightarrow$ lo compenso dividiendo por ρ'

$$\frac{\partial\phi_I}{\partial\rho} = \sum_\nu \int d\kappa \; \kappa\, A_\nu(\kappa)\, I_\nu'(\kappa\rho)\, e^{i\nu\varphi} e^{i\kappa z}$$

$$\frac{\partial\phi_{II}}{\partial\rho} = \sum_\nu \int d\kappa \; \kappa\, B_\nu(\kappa)\left[K_\nu(\kappa a) I_\nu'(\kappa\rho) - I_\nu(\kappa a) K_\nu'(\kappa\rho)\right] e^{i\nu\varphi} e^{i\kappa z}$$

Juntando:

$$\sum_\nu \int d\kappa \; \kappa\left[A_\nu(\kappa) I_\nu'(\kappa\rho') - B_\nu(\kappa)\left(K_\nu(\kappa a) I_\nu'(\kappa\rho') - I_\nu(\kappa a) K_\nu'(\kappa\rho')\right)\right] e^{i\nu\varphi} e^{i\kappa z} =$$

$$= 4\pi q \frac{\delta(\varphi-\varphi')}{\rho'} \delta(z-z')$$

Aplico $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-i\kappa' z} \int_0^{2\pi} d\varphi \; e^{-i\nu'\varphi}$:

$$\sum_{\nu}\int dk\, k\int dz\int d\varphi\,[\dots]\, e^{i(\nu-\nu')\varphi}\, e^{i(k-k')z} = 4\pi q\int dz\int d\varphi\, e^{-i\nu'\varphi}\, e^{-ik'z}\,\frac{\delta(\varphi-\varphi')}{\rho'}\,\delta(z-z')$$

Uso $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{i(k-k')z} = 2\pi\,\delta(k-k')$

$\displaystyle\int_{0}^{2\pi} d\varphi\, e^{i(\nu-\nu')\varphi} = 2\pi\,\delta_{\nu,\nu'}$

$$(2\pi)^2 k'\left[A_{\nu'}(k')I'_{\nu'}(k'\rho') - B_{\nu'}(k')\left(K_{\nu'}(k'a)I'_{\nu'}(k'\rho') - I_{\nu'}(k'a)K'_{\nu'}(k'\rho')\right)\right] =$$

$$= \frac{4\pi q}{\rho'}\, e^{-i\nu'\varphi'}\, e^{-ik'z'}$$ $\to$ hago $\nu'\to\nu$, $k'\to k$

$$\boxed{\begin{aligned} &A_\nu(k)\, I_\nu(k\rho') = B_\nu(k)\left[K_\nu(ka)I_\nu(k\rho') - I_\nu(ka)K_\nu(k\rho')\right] \quad (1)\\ &A_\nu(k)\, I'_\nu(k\rho') - B_\nu(k)\left[K_\nu(ka)I'_\nu(k\rho') - I_\nu(ka)K'_\nu(k\rho')\right] = \frac{q}{\pi k\rho'}\, e^{-i\nu\varphi'}\, e^{-ikz'} \quad (2)\end{aligned}}$$

Cuentas

Notación para abreviar: $A_\nu(k)\to A$ $\quad B_\nu(k)\to B$

$\dfrac{q}{\pi k\rho'}\, e^{-i\nu\varphi'}\, e^{-ikz'} \to C$

$I_\nu, K_\nu \to I, K \qquad k=1$

$A\, I(\rho') = B\left(K(a)I(\rho') - I(a)K(\rho')\right)$ (1)

$A\, I'(\rho') - B\left[K(a)I(\rho') - I(a)K'(\rho')\right] = C$ (2)

(1): $A = \dfrac{K(a)I(\rho') - I(a)K(\rho')}{I(\rho')}\, B$

Reemplazo en (2): $B\left[\dfrac{I'(\rho')}{I(\rho')}\left(K(a)I(\rho') - I(a)K(\rho')\right) - K(a)I'(\rho') + I(a)K'(\rho')\right] = C$

$B\left[\cancel{I'(\rho')K(a)} - \dfrac{I(a)}{I(\rho')}I'(\rho')K(\rho') - \cancel{K(a)I'(\rho')} + I(a)K'(\rho')\right] = C$

$B\,\dfrac{I(a)}{I(\rho')}\left[I(\rho')K'(\rho') - K(\rho')I'(\rho')\right] = C$

$\hookrightarrow$ uso $K_\nu(x)I'_\nu(x) - I_\nu(x)K'_\nu(x) = \dfrac{1}{x}$

$\left(-\dfrac{1}{\cancel{k\rho'}}\right) B_\nu(k)\,\dfrac{I_\nu(ka)}{I_\nu(k\rho')} = \dfrac{q}{\pi\cancel{k\rho'}}\, e^{-i\nu\varphi'}\, e^{-ikz'}$

$$B_\nu(k) = -\frac{q}{\pi}\,\frac{I_\nu(k\rho')}{I_\nu(ka)}\, e^{-i\nu\varphi'}\, e^{-ikz'}$$

$$A_\nu(k) = \frac{q}{\pi}\,\frac{1}{I_\nu(ka)}\left[I_\nu(ka)K_\nu(k\rho') - K_\nu(ka)I_\nu(k\rho')\right] e^{-i\nu\varphi'}\, e^{-ikz'}$$

Y finalmente

$$\phi_I = \frac{q}{\pi}\sum_\nu \int du\, \frac{I_\nu(u\rho')}{I_\nu(ua)}\left[I_\nu(ua)K_\nu(u\rho') - K_\nu(ua)I_\nu(u\rho')\right]e^{i\nu(\varphi-\varphi')}e^{iu(z-z')}$$

$$\phi_{II} = \frac{q}{\pi}\sum_\nu \int du\, \frac{I_\nu(u\rho')}{I_\nu(ua)}\left[I_\nu(ua)K_\nu(u\rho) - K_\nu(ua)I_\nu(u\rho)\right]e^{i\nu(\varphi-\varphi')}e^{iu(z-z')}$$

O, definiendo $\rho_< = \min\{\rho, \rho'\}$ y $\rho_> = \max\{\rho,\rho'\}$:

$$\boxed{\phi = 2q\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{2\pi}\,\frac{I_\nu(u\rho_<)}{I_\nu(ua)}\left[I_\nu(ua)K_\nu(u\rho_>) - K_\nu(ua)I_\nu(u\rho_>)\right]e^{i\nu(\varphi-\varphi')}e^{iu(z-z')}}$$

Vemos que es función de $\varphi-\varphi'$ y $z-z'$. Por simetría, debería ser una función par.

Para la paridad en $\varphi-\varphi'$, miro qué pasa si hago $\nu \to -\nu$:

$I_{-\nu}(x) = I_\nu(x)$, $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$

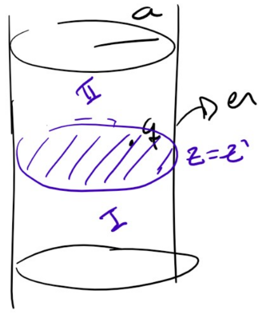
$\Rightarrow$ lo que acompaña a $e^{i\nu(\varphi-\varphi')}$ es simétrico en ν, por lo que al sumar puedo agrupar $e^{i\nu(\varphi-\varphi')}$ con $e^{-i\nu(\varphi-\varphi')}$ para formar $\cos[\nu(\varphi-\varphi')]$.

Ahora hago $u \to -u$:

$I_\nu(-x) = (-1)^\nu I_\nu(x)$, $K_\nu(-x) = (-1)^\nu K_\nu(x)$

Como hay una cantidad par de funciones I y K, lo que acompaña a $e^{iu(z-z')}$ es simétrico en u. Nuevamente, puedo agrupar términos y quedarme con $\cos[u(z-z')]$.

b) Corto con un plano horizontal:



Ahora necesito base en las direcciones ρ y φ

$$\phi = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right) e^{i\nu(\varphi-\varphi')} e^{-\frac{x_{\nu n}}{a}|z-z'|}$$

- No puedo usar N_ν porque divergen en el origen
- Escribo $e^{i\nu(\varphi-\varphi')}$ por conveniencia, porque ya sé que ϕ tiene que ser función de $\varphi-\varphi'$.
- Si planteo ϕ_I y ϕ_{II} por separado y aplico la condición de continuidad en $z=z'$, voy a llegar a la expresión de arriba.

$$\sigma = q\,\delta(\rho-\rho')\,\frac{\delta(\varphi-\varphi')}{\rho'}$$

Salto en la derivada normal: $\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=(z')^-} - \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=(z')^+} = 4\pi\sigma$

$$\sum_{\nu n} 2\frac{x_{\nu n}}{a} A_{\nu n} J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right) e^{i\nu(\varphi-\varphi')} = 4\pi q\,\delta(\rho-\rho')\,\frac{\delta(\varphi-\varphi')}{\rho'}$$

Aplico $\int d\varphi\,\rho \int d\rho\, J_{\nu'}\left(\frac{x_{\nu' n'}\rho}{a}\right) e^{-i\nu'(\varphi-\varphi')}$:

$$2\frac{x_{\nu n}}{a} \underbrace{\frac{a^2}{2} J_{\nu+1}(x_{\nu n})^2}_{} \underbrace{2\pi}_{} A_{\nu n} = 4\pi q\, J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho'}{a}\right)$$

(Renombré $\nu' \to \nu$, $n' \to n$)

viene de $\int d\rho\,\rho\, J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right)$

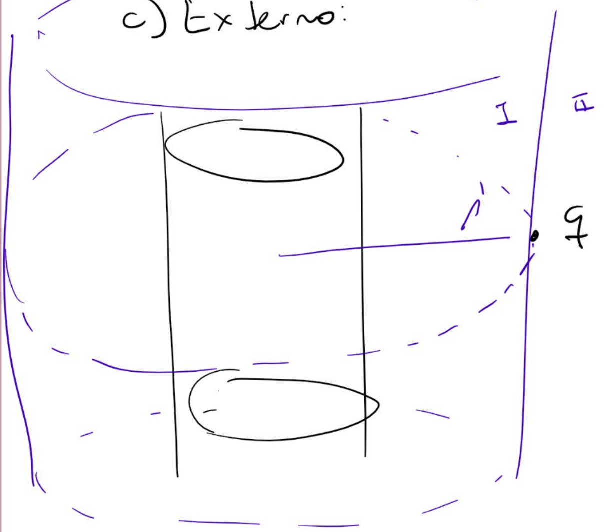
viene de $\int d\varphi\, e^{i(\nu-\nu')\varphi}$

$$\to A_{\nu n} = \frac{2q}{a} \frac{1}{x_{\nu n} J_{\nu+1}(x_{\nu n})^2} J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho'}{a}\right)$$

$$\boxed{\phi = \frac{2q}{a} \sum_{\nu n} \frac{1}{x_{\nu n} J_{\nu+1}(x_{\nu n})^2} J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho'}{a}\right) e^{i\nu(\varphi-\varphi')} e^{-\frac{x_{\nu n}}{a}|z-z'|}}$$

Igual que antes, puedo ver que es una función par de $\varphi-\varphi'$ y $z-z'$.

c) Externo:



$$\phi_I = \sum_\nu \int dk \left(A_\nu(k)\, I_\nu(k\rho) + B_\nu(k)\, K_\nu(k\rho) \right) e^{i\nu\varphi} e^{ikz}$$

↳ Pido $\phi_I(\rho = a) = 0$:

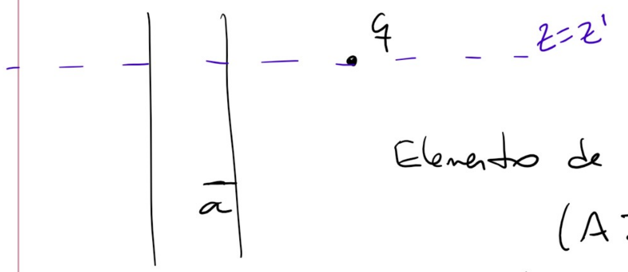
$$\phi_I = \sum_\nu \int dk\, A_\nu(k) \left[K_\nu(ka)\, I_\nu(k\rho) - I_\nu(ka)\, K_\nu(k\rho) \right] e^{i\nu\varphi} e^{ikz}$$

$$\phi_{II} = \sum_\nu \int dk\, B_\nu(k)\, K_\nu(k\rho)\, e^{i\nu\varphi} e^{ikz}$$

De ahora en adelante es igual al caso interior, con solución

$$\phi = 2q \sum_\nu \int \frac{dk}{2\pi} \frac{K_\nu(k\rho_>)}{K_\nu(ka)} \left[K_\nu(ka)\, I_\nu(k\rho_<) - I_\nu(ka)\, K_\nu(k\rho_<) \right] e^{i\nu(\varphi - \varphi')} e^{ik(z-z')}$$

c) Interno:



Elemento de la base:

$$\left(A\, J_\nu(k\rho) + B\, N_\nu(k\rho) \right) e^{i\nu\varphi} e^{-k|z-z'|}$$

Si impongo $\phi(\rho = a) = 0$, obtengo una relación entre A y B.

$$\Rightarrow \phi = \sum_\nu \int dk\, A_\nu(k) \underbrace{\left(N_\nu(ka)\, J_\nu(k\rho) - J_\nu(ka)\, N_\nu(k\rho) \right)} e^{i\nu\varphi} e^{-k|z-z'|}$$

Sturm-Liouville me garantiza que estas funciones son ortogonales (para distintos k) en el intervalo (a, ∞). Lo difícil es demostrarlo explícitamente, y encontrar la normalización!

Si quieren intentarlo: ver Gradshteyn & Ryzhik, 5.54