

# FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2021

## PRÁCTICA DEL 27/09: GUÍA 3 - MEDIOS MATERIALES

### Ecuaciones de Maxwell (estáticas) en medios materiales

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho_\ell$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\ell$$

### Ecuaciones para el campo eléctrico $\mathbf{E}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_t = 4\pi (\rho_\ell + \rho_p) \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{array} \right\} \implies \exists \Phi \text{ tal que } \mathbf{E} = -\nabla \Phi, \text{ con } \nabla^2 \Phi = -4\pi \rho_t$$

donde  $\rho_\ell$  representa la densidad de cargas libres en volumen, y la carga de polarización está dada por la distribución volumétrica

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

con  $\mathbf{P}$  el campo de polarización.

### Ecuaciones para el campo desplazamiento eléctrico $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho_\ell$$

$$\nabla \times \mathbf{D} = 4\pi \nabla \times \mathbf{P}$$

Condiciones de contorno: En la superficie que separa dos medios, usando la ley de Gauss y Stokes, se obtiene

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi \sigma_t$$

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{n}} = 0$$

[ $\hat{\mathbf{n}}$  tiene dirección de (1)  $\rightarrow$  (2)]

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi \sigma_\ell$$

$$(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\sigma_p$$

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \times \hat{\mathbf{n}} = 4\pi (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times \hat{\mathbf{n}}$$

## Dieléctrico Lineal Isótropo y Homogéneo (LIH):

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \chi \mathbf{E} \quad (\chi \text{ susceptibilidad eléctrica}) \\ \mathbf{D} &= \underbrace{(1 + 4\pi \chi)}_{\epsilon} \mathbf{E} \quad (\epsilon \text{ permitividad eléctrica})\end{aligned}$$

### Ejemplos:

(i) En el interior del volumen de un dieléctrico LIH, donde vale  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{D} / \epsilon = 4\pi \left( \frac{\rho_\ell}{\epsilon} \right) = 4\pi \rho_t = 4\pi (\rho_\ell + \rho_p)$$

Una carga libre embebida en un medio con permitividad  $\epsilon$  queda apantallada ( $\epsilon > 1$ ). Por ejemplo, con una carga libre puntal  $q$  dentro del medio, si

$$\rho_\ell = q \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

la densidad de carga total es

$$\rho_t = \frac{q}{\epsilon} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Es decir, la carga total en  $\mathbf{r}'$  es

$$q_t = q/\epsilon = q + q_p \Rightarrow q_p = -q(\epsilon - 1)/\epsilon.$$

Se induce una carga de polarización  $q_p$ , apantallando a la carga libre  $q$ , ubicada en la misma posición.

(ii) Lo mismo sucede con densidades libres lineales  $\lambda_\ell$ , y/o superficiales  $\sigma_\ell$ , sumergidas en un medio con  $\epsilon$ . Por ejemplo, la densidad total superficial dentro del medio será:  $\sigma_\ell + \sigma_p = \sigma_t = \sigma_\ell/\epsilon$ . Pero si la densidad se ubica justo en la superficie que separa dos medios distintos, no hay un  $\epsilon$  sino que tenemos  $\epsilon_1$  de una lado y  $\epsilon_2$  del otro, de modo que podemos definir la contribución de cada lado a partir de

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad [\hat{\mathbf{n}} \text{ tiene dirección de (1)} \rightarrow \text{(2)}] \\ &= \underbrace{\frac{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}}{4\pi}}_{\sigma_{t_2}} + \underbrace{\frac{\mathbf{E}_1 \cdot (-\hat{\mathbf{n}})}{4\pi}}_{\sigma_{t_1}} = \underbrace{\frac{\mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}}{4\pi\epsilon_2}}_{\frac{\sigma_{\ell_2}}{\epsilon_2}} + \underbrace{\frac{\mathbf{D}_1 \cdot (-\hat{\mathbf{n}})}{4\pi\epsilon_1}}_{\frac{\sigma_{\ell_1}}{\epsilon_1}} \\ &= \sigma_{t_2} + \sigma_{t_1} = \frac{\sigma_{\ell_2}}{\epsilon_2} + \frac{\sigma_{\ell_1}}{\epsilon_1}\end{aligned}$$

Si el medio es el mismo de ambos lados ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ ) recuperamos

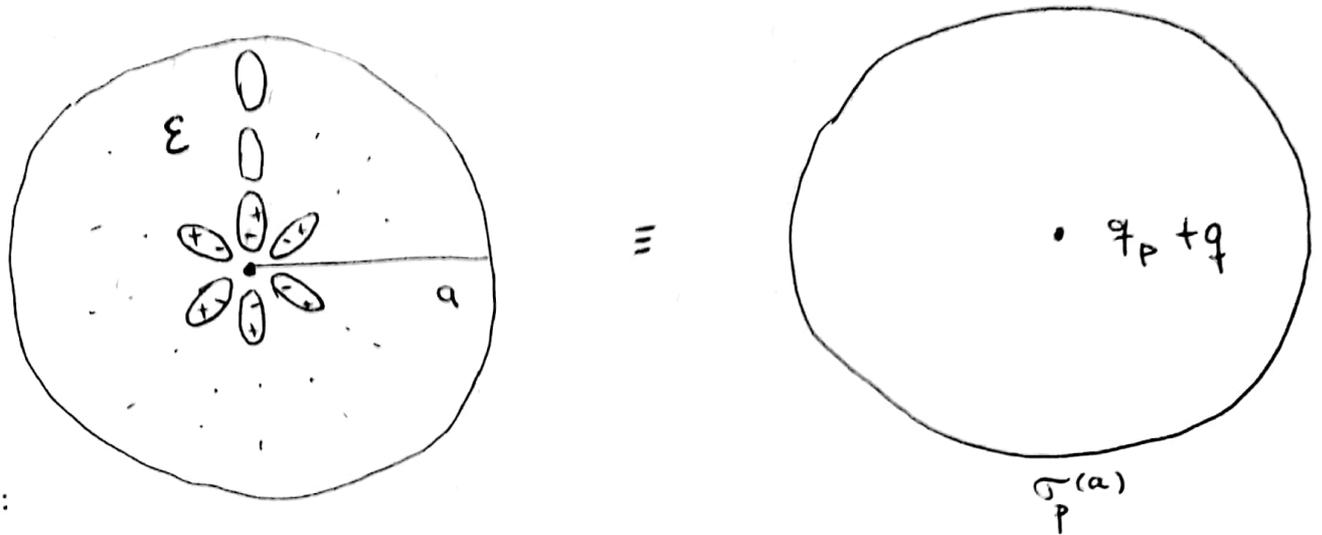
$$\sigma_t = \frac{\sigma_{\ell_1}}{\epsilon} + \frac{\sigma_{\ell_1}}{\epsilon} = \frac{\sigma_\ell}{\epsilon},$$

a partir de la contribución a cada lado.

(iii) Finalmente, si tenemos un conductor en la región denominada con (1), entonces  $\mathbf{E}_1 = 0$ , y queda nuevamente

$$\sigma_t = \frac{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}}{4\pi} = \frac{\mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}}{4\pi\epsilon_2} = \sigma_{t_2} = \frac{\sigma_{\ell_2}}{\epsilon_2}$$

Esfera dieléctrica ( $\epsilon$ ) con  $q(>0)$  en el centro:



Ansatz:

Simetría esférica  $\Rightarrow \sigma_p^{(a)} = -q_p / (4\pi a^2) \quad / \quad Q_{\text{total}} = 0$

[Ansatz: Adentro y afuera tenemos campos radiales]

(\*)

$$\phi = \phi_q + \phi_{q_p} + \phi_{\sigma_p^{(a)}}$$

$$= \frac{q}{r} + \frac{q_p}{r} - \frac{q_p}{r_s}$$

$$\therefore q_p = -q \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \right)$$

$$\therefore r_s = \text{Máx} \{ r, a \}$$

(\*\*) : Gauss para  $\vec{D}$ :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q_L^{(enc.)}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$\times q?$  : ver Rta.

[No tiene fuentes en interior en volumen ni en superficie de interfase]

en su divergencia (ley de Gauss)  $\vec{D}$  solo tiene fuentes

$$\therefore \vec{E} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon r^2} \hat{r} & \text{si } r < a \\ \frac{q}{\epsilon r^2} \hat{r} & \text{si } r > a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon} \frac{1}{r} - \frac{q}{\epsilon a} + \frac{q}{a} & ; r < a \\ \frac{q}{r} & ; r > a \end{cases}$$

(\*\*\*)

$$\phi = \phi_{q_e} + \phi_{\sigma_{pl}(a)} \quad ; \quad \phi_{\sigma_{pl}(a)} = \sum_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \varphi) \frac{r^l}{a^l} A_{l,m}$$

(ángulos sin primar)

$$= \frac{q}{\epsilon} \frac{1}{r} + \left( \begin{matrix} A \\ - \\ r_2 \end{matrix} \right)_{r,a} = A_{00} \cdot \frac{r^0}{r_2^0} = \frac{A}{r_2}$$

↓  
sim. est.

condición de salto sobre  $r=a$ :

$$(\vec{D}_{ext} - \vec{D}_{int}) \Big|_a^{\hat{r}} = 4\pi \sigma_L \Big|_a = 0$$

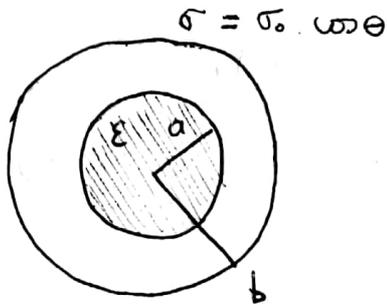
$$(\vec{E}_{ext} - \epsilon \vec{E}_{int}) \Big|_a^{\hat{r}} = 0$$

$$-\partial_r \phi \Big|_{a^+} + \epsilon \partial_r \phi \Big|_{a^-} = 0$$

$$\epsilon \left( \frac{q}{\epsilon} \left( \frac{-1}{a^2} \right) + 0 \right) - \left( -\frac{A}{a^2} - \frac{q}{\epsilon} \frac{1}{a^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow A = q \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \right)$$

P3)



( caso  $a < b$  )

[Esfera dieléctrica con  $\epsilon$  (escalar, uniforme) : MLIH]

Identificar y ubicar las cargas libres y de polarización :

• Libres :  $\sigma$  en  $r = b$

• Polarización :  $\chi$  es uniforme en  $r < a$

En volumen :  $(r < a)$

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot (\chi \vec{E}) \stackrel{\uparrow}{=} -\chi \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

MLIH :  $\vec{P} = \chi \vec{E}, (\chi \equiv \frac{\epsilon - 1}{4\pi})$

$$= -\frac{\chi}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 : r < a$$

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \epsilon$  es uniforme en  $r < a$

En superficie :  $r = a$

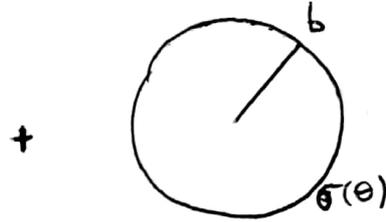
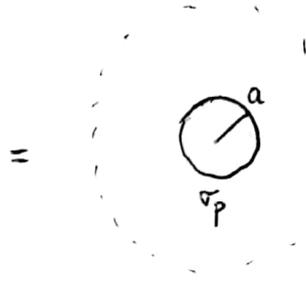
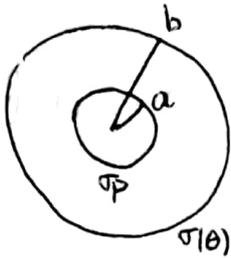
El cambio de medio en una interfase produce un cambio en  $\vec{P}$   
 $\Rightarrow$  aparece carga de polarización inducida.

$$\sigma_p = - \left[ \underbrace{(\vec{P}_{ext} - \vec{P}_{int})}_{=0} \cdot \underbrace{\hat{m}_{i \rightarrow e}}_{=\hat{r}} \right] \Big|_{\text{Sup. } r=a} = (\vec{P}_{int} \cdot \hat{r}) \Big|_a$$

( $\chi_{ext} = 0$ )

$\sigma = \sigma_0 \cdot \cos \theta$  : cargas libres en  $r=b$  (dato)

$\sigma_p = \vec{P}(a) \cdot \hat{r}$  : cargas de polarización en  $r=a$   
(no la conocemos a priori)



$$\phi = \phi_E + \phi_\sigma$$

Resolución de  $\phi_\sigma$  :

$$\phi_\sigma = \sum_{l=0}^{+\infty} B_l \cdot P_l(\cos \theta) \cdot \left( \frac{r^l}{r^{l+1}} \right)_{r,b} : \text{Potencial de una cáscara en } r=b$$

Como  $\sigma$  es dato puedo resolver esta parte independientemente :

$$\left( -\partial_r \phi_\sigma \right)_{b^+} + \left( \partial_r \phi_\sigma \right)_{b^-} = 4\pi \sigma$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} B_l \cdot P_l(\cos \theta) \left[ \frac{(l+1)}{b^2} + \frac{l}{b^2} \right] = 4\pi \overbrace{\sigma_0 \cdot \cos \theta}^{\sigma \text{ dato}} \underbrace{P_1'(\cos \theta)}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_{l \neq 1} = 0 \\ B_1 = \frac{4\pi \sigma_0 \cdot b^2}{(2 \cdot 1 + 1)} = \frac{4\pi b^2 \sigma_0}{3} \end{array} \right. \text{ [ortogonalidad de los } P_l(\cos \theta) \text{]}$$

$$\phi_\epsilon = \sum_l A_l P_l(\cos\theta) \left( \frac{r^\epsilon}{r_s \epsilon^l} \right)_{r,a} : \text{Potencial de una cáscara en } r=a \text{ con } \sigma_p.$$

- $\sigma_p$  es desconocida  $\Rightarrow$  no podemos resolver  $\phi_\epsilon$  independientemente
- Hay que regresar al problema original con la construcción que tenemos hecha :  $\phi = \phi_\sigma + \phi_\epsilon$
- La única incógnita son los  $A_l$ . Para despejarlos hay que usar la información en  $r=a$ , donde desconocemos la  $\sigma_{\text{total}} = \sigma_p$ , pero sabemos

que :  $\sigma_{\text{libre}} = 0 \Rightarrow$  usamos el salto

de  $\vec{D}$  :

$$(\vec{D}_{\text{ext}} - \vec{D}_{\text{int}}) \cdot \hat{r} \Big|_a = 4\pi \underbrace{\sigma_L}_{=0} \Big|_a$$

$$(1 \cdot \vec{E}_{\text{ext}} - \epsilon \cdot \vec{E}_{\text{int}}) \cdot \hat{r} \Big|_a = 0$$

$$-\partial_r \phi \Big|_{a^+} + \epsilon \cdot \partial_r \phi \Big|_{a^-} = 0$$

Obs:  $\phi$  es el potencial original (el total) del problema

$$(\phi = \phi_\sigma + \phi_\epsilon)$$

$$\phi_E = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) A_l \begin{cases} r^l/a^{l+1}, & r \leq a \\ a^l/r^{l+1}, & r > a \end{cases}$$

$$\phi_r = \frac{B_1}{\frac{4\pi b^2 \sigma_0}{3}} \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{r_c}{r^2}\right)_{r,b} = \begin{cases} \frac{4\pi b^2 \sigma_0}{3} \frac{\cos\theta r}{b^2}, & r \leq b \\ \frac{4\pi b^2 \sigma_0}{3} \frac{\cos\theta b}{r^2}, & r \geq b \end{cases}$$

⇒

$$-\left[\partial_r (\phi_r + \phi_E)_{r>a}\right]_{r=a^+} + \epsilon \left[\partial_r (\phi_r + \phi_E)_{r<a}\right]_{r=a^-} = 0$$

$$-\left[B_1 \frac{c(\theta)}{b^2} + \sum A_l P_l(\cos\theta) [-(l+1)] \cdot \frac{a^l}{a^{l+2}}\right] + \epsilon \left[B_1 \frac{c\theta}{b^2} + \sum A_l P_l(\cos\theta) l \cdot \frac{a^{l+1}}{a^{l+1}}\right] = 0$$

$$\sum A_l P_l(\cos\theta) \frac{l(\epsilon+1)+1}{a^2} + B_1 \cdot \frac{c\theta}{b^2} (\epsilon-1) = 0$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \cdot A_l \cdot \frac{l(\epsilon+1)+1}{a^2} = -B_1 \frac{(\epsilon-1)}{b^2} \cdot P_1(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{l \neq 1} = 0 \\ A_1 = -\frac{(\epsilon-1)}{[l(\epsilon+1)+1]_{l=1}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 B_1 = -\frac{(\epsilon-1)}{\epsilon+2} \cdot a^2 \cdot \frac{4\pi \sigma_0}{3} \end{cases}$$

∴

$$\phi = \frac{4\pi \sigma_0}{3} \cdot \left[ \left(\frac{r_c}{r^2}\right)_{r,b} \cdot b^2 - \frac{(\epsilon-1)}{\epsilon+2} \cdot \left(\frac{r_c}{r^2}\right)_{r,a} \cdot a^2 \right] \cdot \cos(\theta)$$

Obs:  $\epsilon \rightarrow 1$  recupera solución sin dieléctrico.

Análisis del campo de las cargas libres ( $\sigma_i = \sigma$ ):

Cáscara con  $\sigma_L = \sigma_0 \cos \theta$  en  $r = b$ ,

$$\phi_r = \frac{4\pi\sigma_0}{3} \begin{cases} r \cdot \cos \theta = z & r \leq b \\ b^3 \frac{\cos \theta}{r^2} = b^3 \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^3} & r \geq b \end{cases} = \begin{cases} E_b \cdot z & r \leq b \\ \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} & r \geq b \end{cases}$$

( $\cos \theta = \hat{z} \cdot \hat{r}$ )

$$E_b = \frac{4\pi\sigma_0}{3}; \quad \vec{P}_b = \frac{4\pi\sigma_0 b^3}{3} \hat{z} = P_b \hat{z}; \quad E_b = P_b / b^3$$

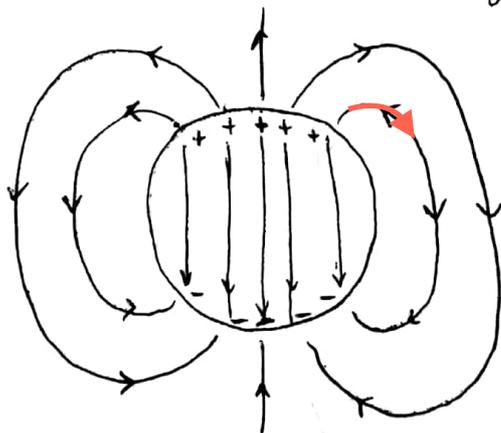
$$\vec{E}_\sigma = -\vec{\nabla} \phi_\sigma = \begin{cases} -E_b \hat{z} = -\vec{P}_b / b^3 & r \leq b \\ \frac{3(\vec{P}_b \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{P}_b}{r^3} & r \geq b \end{cases}$$

cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \right) &= \hat{r} \cdot \partial_r \left( \frac{1}{r^2} \cos(\theta) \right) + \frac{\hat{\theta}}{r} \partial_\theta \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \right) \\ &= -\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{r} - \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\theta} = \frac{\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} - 3 \cos \theta \hat{r}}{r^3} \\ &= [-3(\hat{z} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} + \hat{z}] / r^3 \end{aligned}$$

(asumiendo  $\sigma_0 > 0$ )

Campo  $\vec{E}_\sigma$ :



dipolar: • uniforme adentro  
• dipolo <sup>desde</sup> afuera

(líneas de campo salen de  $\oplus$  y entran en  $\ominus$ )  
↓  
cargas positivas      ↓  
negativas

# Análisis del Campo $\vec{E}$ de la configuración total:

$$\phi_\epsilon = \begin{cases} E_a \cdot z & , r \leq a \\ \frac{\vec{P}_a \cdot \vec{r}}{r^3} & , r \geq a \end{cases} ; \quad E_a = - \left( \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \right) \vec{E}_b$$

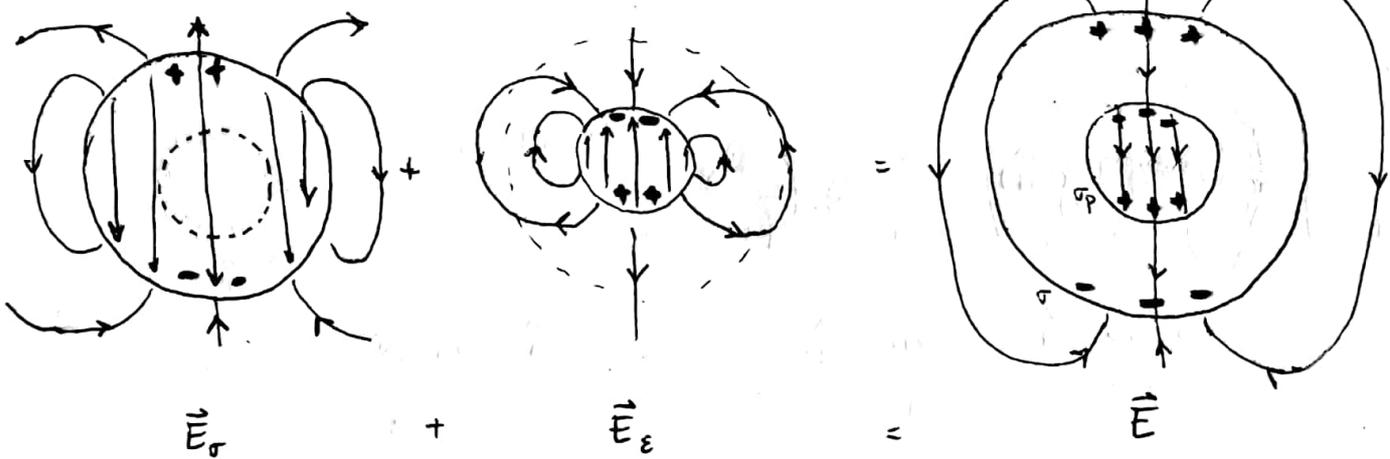
$$1 > 0 \rightarrow \frac{4\pi\sigma_0}{2}$$

$$\vec{P}_a = P_a \hat{z} ; \quad P_a = a^3 E_a = - \left( \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \right) P_b \left( \frac{a^3}{b^3} \right) = - \left( \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \right) E_b b^3$$

$$\phi = \begin{cases} (E_b + E_a) \cdot z & , r \leq a \\ z E_b + \frac{\vec{P}_a \cdot \vec{r}}{r^3} & , a \leq r \leq b \\ \left( \frac{\vec{P}_b + \vec{P}_a}{r^3} \right) \cdot \vec{r} & , b \leq r \end{cases}$$

$(P_b + P_a) \hat{z} ; P_b + P_a > 0$

$$\vec{E} = -\nabla\phi :$$



$$\sigma_p = \vec{P}_{int} \cdot \hat{r} \Big|_a = \chi \vec{E}_{int} \cdot \hat{r} \Big|_a = \chi \cdot (-\partial_r \phi_{int}) \Big|_a ; \quad \chi = \frac{\epsilon-1}{4\pi}$$

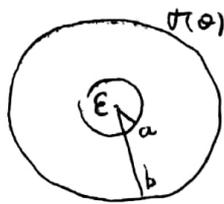
$$= - \left( \frac{\epsilon-1}{4\pi} \right) (E_a + E_b) \cdot \cos\theta = - \left( \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \right) \sigma_0 \cdot \cos\theta \quad \left( \text{se puede leer de } \phi_\epsilon \text{ pues sus fuentes son exclusivamente } \sigma_p \text{ en este caso} \right)$$

$$Q_p = \int \sigma_p \cdot a^2 d\Omega = 0 \quad \checkmark : \text{carga total del dieléctrico}$$

$$\vec{P}_p = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sigma_p \cdot \vec{r} \Big|_a \overbrace{d(\cos\theta) d\varphi}^{d\Omega} a^2 = \vec{P}_a \quad \checkmark : \text{momento dipolar del dieléctrico}$$

b) Misma config. pero sumergida en un campo uniforme:

$$\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$$



$\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ : Este campo llega hasta infinito

$\vec{E}_0$  representa una condición de contorno tipo Neumann en infinito:

$$\underbrace{(-\vec{\nabla}\phi) \cdot \hat{n}}_{-\partial_r \phi|_{\infty}} \Big|_{\infty} = \vec{E} \cdot \hat{n} \Big|_{\infty} = E_0 \cdot \hat{z} \cdot \hat{r} = E_0 \cdot \cos\theta$$

$$\left( \begin{array}{l} \hat{n} = \hat{r} \\ \vec{E}|_{\infty} = E_0 \cdot \hat{z} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \phi|_{\infty} = -E_0 \cdot \cos\theta \cdot r \Big|_{\infty} = -E_0 \cdot z \Big|_{\infty}$$

[ Si resuelvo por separación de variables en regiones, hay que conservar este término en el potencial externo (en vez de tirar todos los que divergen en 'inf') ]

Por superposición:

$$\begin{array}{c} \text{sigma(theta)} \\ \text{E} \\ \uparrow \vec{E}_0 \end{array} = \begin{array}{c} \text{E} \\ \text{sigma(theta)} \\ \uparrow \vec{E}_0 \end{array} + \begin{array}{c} \text{sigma(theta)} \\ \uparrow \vec{E}_0 \end{array}$$

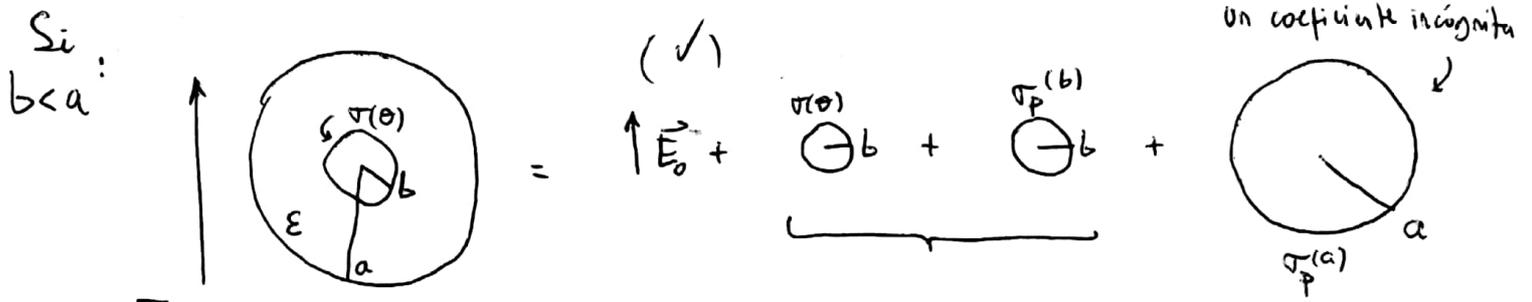
$$\phi = \phi_a + \phi_{\sigma} + \phi_0 = -E_0 \cdot z$$

(✓) (✓)

un coeficiente incógnita

$$\Rightarrow [\vec{\nabla}(\sigma) - \vec{\nabla}(\sigma-)]. \hat{r} = 4\pi \sigma_r|_a = 0$$

y despejamos.



En  $r=b$  la carga libre queda apantallada

$$\sigma_{total}^{(b)} = \sigma(\theta) + \sigma_p^{(b)} = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon} (\checkmark)$$

[pues ahora en el volumen  $r < a$  tenemos:

$$P_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\chi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\chi}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon}\right) \cdot P_L$$

$$= -\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon}\right) \cdot \underbrace{\sigma(\theta)}_{\sigma_L^{(b)} = \sigma_0 \cos\theta} \cdot \delta(r-b) \Rightarrow \sigma_{tot}^{(b)} = \sigma_L^{(b)} + \sigma_p^{(b)} = \frac{\sigma_L^{(b)}}{\epsilon} \equiv \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon} \left[ \begin{array}{l} \text{dato} \\ \sigma(\theta) \end{array} \right]$$

La resolución es análoga al caso anterior pues la distrib. de carga en  $r=b$  es conocida. Ahora en lugar

de  $\sigma(\theta)$  usamos  $\frac{\sigma(\theta)}{\epsilon}$  [apantallada], es decir  $\underbrace{\phi_\sigma}_{\text{del problema anterior}} \rightarrow \frac{\phi_\sigma}{\epsilon} = \phi_{\sigma_{tot}^{(b)}}$ .

finalmente:

$$\left[ \vec{D}(a^+) - \vec{D}(a^-) \right] \cdot \hat{r} = 4\pi \sigma_L|_a = 0$$



$$\sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos\theta) \left\{ - \left[ q \cdot \left( \frac{l}{r^{l+1}} \cdot \frac{b^{l-1}}{r^{l+1}} + \frac{a}{r'} \cdot \frac{(a^2/r')^l}{b^{l+2}} \cdot (l+1) \right) + \right. \right.$$

$$A_l \left( -\frac{(l+1)}{b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{(a^2/b)^l}{b^{l+2}} \cdot (l+1) \right) \left. \right] +$$

$$\left. \varepsilon \left[ q \left( \frac{l}{r^{l+1}} \cdot \frac{b^{l-1}}{r^{l+1}} + \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \cdot \frac{(l+1)}{b^{l+2}} \right) + A_l \left( \frac{l}{b^2} + \frac{a^{2l+1}}{b^{l+1}} \cdot \frac{(l+1)}{b^{l+2}} \right) \right] \right\} = 0$$

$$\Rightarrow A_l = -q (\varepsilon - 1) \left( \frac{b}{r'} \right)^{l+1} \frac{l + (l+1) (a/b)^{2l+1}}{\varepsilon [l + (l+1) (a/b)^{2l+1}] + (l+1) [1 - (a/b)^{2l+1}]}$$

( $\varepsilon \rightarrow 1$ : sin dieléctrico,  $\varepsilon \rightarrow \infty$ : conductor hasta  $r=b$ )

$$b) \quad \sigma_p^{(a)} = - \left[ \overbrace{\vec{P}(a^+)}^{\chi \vec{E}(a^+)} - \overbrace{\vec{P}(a^-)}^{\chi \vec{E}(a^-)} \right] \cdot \hat{r} = - \chi (-\partial_r \phi|_{a^+})$$

$$\sigma_p^{(b)} = \vec{P}(b^-) \cdot \hat{r} = \chi (-\partial_r \phi|_{b^-})$$

$$\sigma_L^{(a)} = \varepsilon \cdot \sigma_{tot}^{(a)} = \varepsilon (\sigma_L^{(a)} + \sigma_p^{(a)}) \Rightarrow \sigma_L^{(a)} = \frac{\varepsilon \sigma_p^{(a)}}{1 - \varepsilon}$$

$$= \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \chi \cdot \partial_r \phi|_{a^+} = - \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \partial_r \phi|_{a^+} = \varepsilon \cdot \sigma_{tot}^{(a)} \quad \checkmark$$

$$Q_{tot}^{(a)} = \int \overbrace{\sigma_{tot}^{(a)}}^{Q_{pol}^{(a)} + Q_{libre}^{(a)}} a^2 d\Omega \quad ; \quad Q_{tot}^{(b)} = \int \sigma_p^{(b)} b^2 d\Omega \quad \left( \chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \right)$$

$$Q_{polarización} = Q_{pol}^{(a)} + Q_{pol}^{(b)} = 0$$