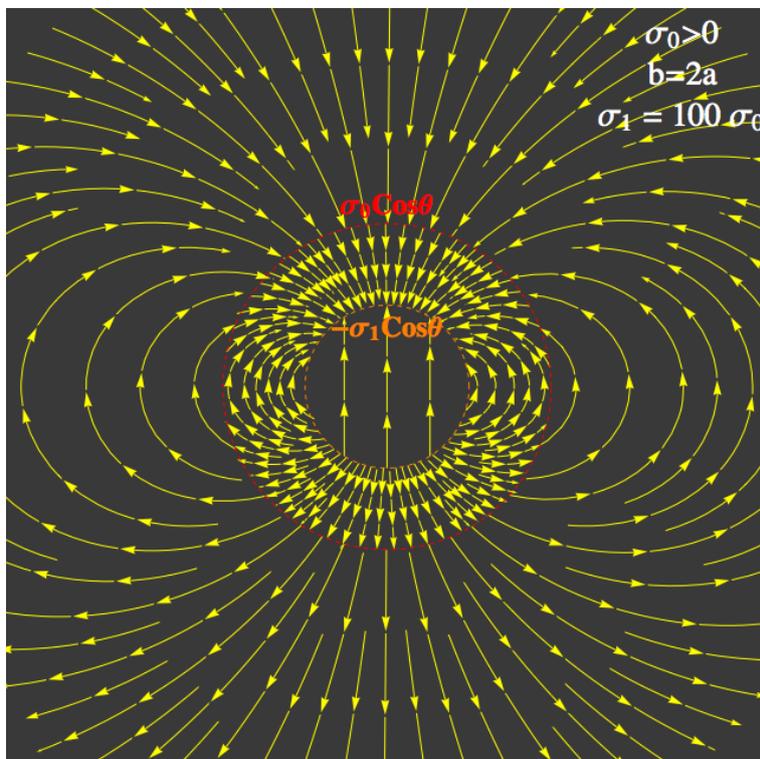


Guía 3 - Problema 3: Líneas de campo eléctrico



Cáscaras con distribución dipolar

FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2021

PRÁCTICA DEL 29/09: GUÍA 3 - MEDIOS MATERIALES

Ecuaciones de Maxwell (estáticas) en medios materiales

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho_\ell$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\ell$$

Ecuaciones para el campo magnético B:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_\ell + \mathbf{j}_m) \end{aligned}$$

donde \mathbf{j}_ℓ representa la densidad de corrientes libres en volumen, \mathbf{j}_m es la densidad de corrientes magnéticas en volumen y se define a partir de

$$\mathbf{j}_m = c \nabla \times \mathbf{M}$$

con $\mathbf{M} = \sum_i N_i \langle \mathbf{m}_i \rangle$ el **campo de magnetización**.

Definición (recuerdo Guía 1) : Potencial vector \mathbf{A} (en el gauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad / \quad \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) \underbrace{=}_{\nabla \cdot \mathbf{A}=0} -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}_t(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Ecuaciones para el campo intensidad magnética: $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{H} &= -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M} \equiv 4\pi \rho_m \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\ell\end{aligned}$$

Teorema de Helmholtz: \mathbf{H} se puede descomponer unívocamente como

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \underbrace{\mathbf{H}_d(\mathbf{r})}_{\text{irrotacional}} + \underbrace{\mathbf{H}_r(\mathbf{r})}_{\text{solenoidal}} \quad / \quad \begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}_d &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_r &= 0\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{H}_d(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi_H(\mathbf{r}) \quad / \quad \nabla^2 \Phi_H(\mathbf{r}) = -4\pi \rho_m \quad \left[\Phi_H(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

y

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_H(\mathbf{r}) \quad / \quad \nabla^2 \mathbf{A}_H(\mathbf{r}) \underbrace{=}_{\nabla \cdot \mathbf{A}_H = 0} -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\ell \quad \left[\mathbf{A}_H(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}_\ell(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

Observación: Si $\mathbf{j}_\ell = 0 \implies \mathbf{H} = -\nabla \Phi_H$.

Condiciones de contorno: En la superficie que separa dos medios, usando la ley de Gauss y Stokes, se obtiene

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_t \\ (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 4\pi \sigma_m \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_\ell \quad [\hat{\mathbf{n}} \text{ tiene dirección de (1)} \rightarrow \text{(2)}] \\ (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= -\sigma_m \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) &= \frac{1}{c} \mathbf{g}_m\end{aligned}$$

Medio magnético Lineal Isótropo y Homogéneo (LIH):

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \chi \mathbf{H} \quad (\chi_m: \text{susceptibilidad magnética}) \\ \mathbf{B} &= \underbrace{(1 + 4\pi \chi_m)}_{\mu} \mathbf{H} \quad (\mu: \text{permeabilidad magnética})\end{aligned}$$

- LIH con $\mu > 1$: paramagnético
- LIH con $\mu < 1$: diamagnético

Otros medios magnéticos típicos (no lineales):

- $\mathbf{M}(\mathbf{H} = 0) \neq 0$: imán permanente
- $\mathbf{B} = f(\mathbf{H}, \text{historia})$: ferromagnético con histéresis

(Repaso de divergencia y rotor: ver material adicional en la página web [link: Operadores diferenciales.]

Teorema de Helmholtz (campos de gradientes y rotores):

Dado el campo vectorial suave $\mathbf{W}(\mathbf{r})$, tal que $\mathbf{W}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, y con

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}) &= D(\mathbf{r}) & : \text{fuente en divergencia} \\ \nabla \times \mathbf{W}(\mathbf{r}) &= \mathbf{C}(\mathbf{r}) & : \text{fuente en rotor}\end{aligned}$$

se puede descomponer unívocamente, como:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \underbrace{\mathbf{V}(\mathbf{r})}_{\text{irrotacional}} + \underbrace{\mathbf{U}(\mathbf{r})}_{\text{solenoidal}} \quad / \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad / \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

y

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad / \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

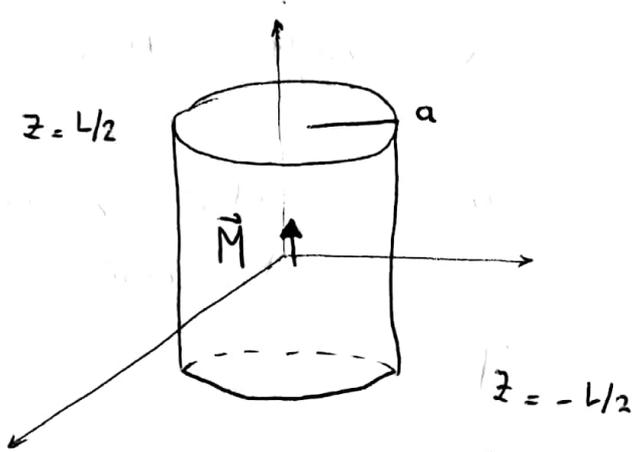
Observaciones:

(i) Por consistencia debe ser $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0$.

(ii) Las hipótesis generales exigen que las fuentes decaigan a cero como: $(\mathbf{D}, \mathbf{C}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1/r^\epsilon$, con $\epsilon > 2$.

(iii) Para garantizar la unicidad de una solución que posee alguna patología, por ejemplo el comportamiento en infinito (o de sus fuentes), hay que apelar a algún otro método.

(iv) *No existe una función no trivial con divergencia y rotor nulos y que tienda a cero en infinito (la única solución es la nula).*



imán permanente :

$$\vec{M} = M_0 \hat{z}$$

(M_0 : uniforme)

Fuentes de \vec{B} : $[\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \wedge \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{\text{tot}}]$

en volumen (regiones abiertas) :

$$\vec{J}_e^{(\text{vol})} = 0$$

$$\vec{J}_M^{(\text{vol})} = c \nabla \times \vec{M} = 0$$

interior : M_0 uniforme

exterior : $M = 0$

en superficies :

$$\vec{g}_e = 0$$

$$\vec{g}_M = c \cdot \hat{n} \times (\vec{M}_{\text{ext}} - \vec{M}_{\text{int}}) \Big|_{\text{sup.}}$$

Laterales : $\vec{g}_M^{[L]} = c \cdot \hat{\rho} \times (M_0) \hat{z} = c M_0 \hat{\phi} : |z| < L/2$
 $\rho = a$

Tapas : $\vec{g}_M^{[L/2]} = c \cdot \hat{z} \times (-M_0 \hat{z}) = 0$

Fuentes de \vec{H} : $[\nabla \cdot \vec{H} = 4\pi p_M \quad \wedge \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_e]$

Divergencia:

en volumen :

$$p_M^{(vol)} = -\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad : \quad \text{adentro y afuera del imán}$$

en superficie :

$$\sigma_M = -(\vec{M}_{ext} - \vec{M}_{int}) \cdot \hat{n}_{sup}$$

Laterales ($0 \leq \varphi < 2\pi, |z| < L/2, \rho = a$) : $\sigma_M^{lat} = 0$

Tapas :

$\sigma_{M_0} = M_0$: $z = L/2, \rho < a$
$\sigma_{M_0} = -M_0$: $z = -L/2, \rho < a$

Rotor : $\vec{J}_e = 0$

$\vec{J}_e = 0$

Resumen :

Para \vec{B} :



$$\vec{g}_M = c M_0 \hat{\varphi} \quad (\equiv \quad \begin{matrix} \uparrow \text{ corriente} \\ I \cdot n \\ \downarrow \end{matrix})$$

densidad de espiras (lineal)

Para \vec{H} :

σ_M

$\sigma_{M_0} = M_0$

$-\sigma_M$

Resolución mediante $\vec{H} = -\vec{\nabla} \phi_H$, $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0, \forall \mathbb{R}^3)$$

Se trata de un problema equivalente al de electrostática para " \vec{E} " con fuentes $\pm \sigma_{M_0}$ en las tapas:



$$\phi_H = \phi_{(+)} + \phi_{(-)}$$

$$\phi_{(+)} = \int_0^{+\infty} dk J_0(k\rho) \cdot e^{-k|z-L/2|} \tilde{A}(k)$$

salto: $-\partial_z \phi_+ \Big|_{\frac{L}{2}^+} + \partial_z \phi_+ \Big|_{\frac{L}{2}^-} = 4\pi \sigma_M \cdot \delta(a-\rho)$

[idem. P.15 - guía 2 FT1 - practica 08]

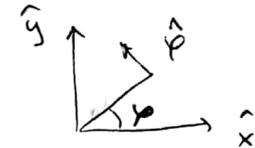
$$\Rightarrow \tilde{A}(k) = 2\pi \sigma_M \frac{a}{k} J_1(ka)$$

$$\boxed{\phi_H = 2\pi \cdot M_0 \cdot a \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} J_0(k\rho) \cdot J_1(ka) \left(e^{-k|z-\frac{L}{2}|} - e^{-k|z+\frac{L}{2}|} \right)}$$

Resolución mediante $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ /

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\vec{J}_{\text{tot}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{integral de Poisson}$$

con $\vec{J}_{\text{tot}}(\vec{r}') = \underbrace{\vec{j}_M(\vec{r}')}_{\text{c. Mo. } \hat{\rho}' \otimes (\frac{L}{2} - z') \otimes (z + \frac{L}{2})} \cdot \delta(\rho' - a)$

$$\hat{\rho}' = -\sin\varphi' \hat{x} + \cos\varphi' \hat{y}$$


uso :

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\cos[\nu(\varphi - \varphi')]}{(1 + \delta_{\nu,0})} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z - z')] \times$$

Desarrollo como integral de Fourier

$$I_0(k\rho_c) K_0(k\rho_s) \Big|_{\rho, \rho'}$$

$$\vec{A} = \frac{4aM_0}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (1 + \delta_{\nu,0}) \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos[\nu(\varphi - \varphi')] \cdot \hat{\rho}' \int_0^{\infty} dk \int_{-L/2}^{L/2} dz' \cos[k(z - z')] I_0(k\rho_c) K_0(k\rho_s) \Big|_{a, \rho}$$

$\frac{2}{k} \cdot \cos(kz) \sin(kL/2)$

$$\pi (-\sin(\nu\varphi) \delta_{\nu,1} \hat{x} + \cos(\nu\varphi) \delta_{\nu,1} \hat{y})$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r})} = 8M_0 \cdot a \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \cdot \cos(kz) \cdot \sin\left(\frac{kL}{2}\right) I_0(k\rho_c) K_0(k\rho_s) \Big|_{a, \rho} \hat{\varphi}$$



$$z = -h < -\frac{L}{2}$$

μ : medio magnético semi-infinito
(L.I.H)

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \text{en} \quad z < -h \quad (\text{desconocida a priori})$$

Nuevas fuentes de los campos:

$$\begin{aligned} \text{En volumen } (z < -h): \quad \vec{J}_M^{(vol)} &= c \nabla \times \vec{M} = c \chi_m \nabla \times \vec{H} = \boxed{0} \\ \rho_M^{(vol)} &= -\nabla \cdot \vec{M} = -\frac{\chi_m}{\mu} \nabla \cdot \vec{B} = \boxed{0} \end{aligned}$$

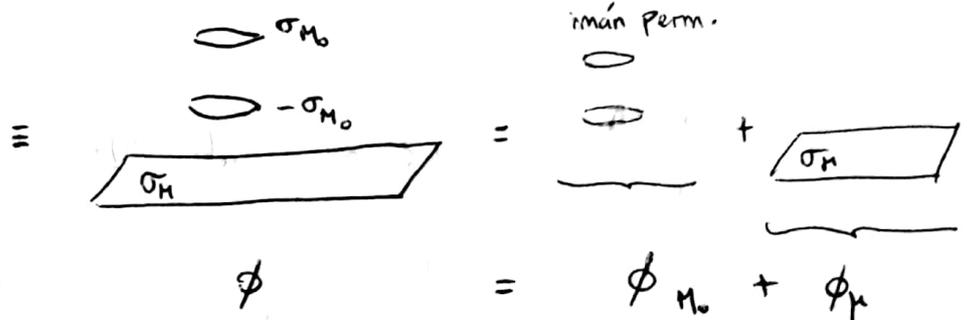
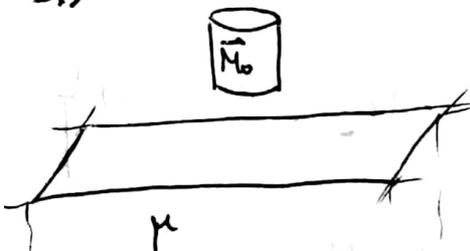
En superficie: $z = -h$,

$$\vec{J}_M = c \cdot \hat{z} \times (\vec{0} - \vec{M}_{inf}) = -c \chi_m \hat{z} \times \vec{H}$$

$$\sigma_M = -\hat{z} \cdot (\vec{0} - \chi_m \vec{H}_{inf}) = (\hat{z} \cdot \vec{H}) \Big|_{-h} \chi_m$$

No las tengo a priori

Para \vec{H} :
 \Rightarrow



$$\phi_{H_0} = 2\pi H_0 a \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} J_0(k\rho) J_1(ka) \left[\underbrace{e^{-k|z-L/2|} - e^{-k|z+L/2|}}_{(*)} \right]$$

$$\phi_{\mu} = (2\pi H_0 a) \int_0^{\infty} dk J_0(k\rho) e^{-k|z+h|} B(k) \left(\frac{J_1(ka)}{k} \right)$$

condición de contorno: Salto en $z = -h$,

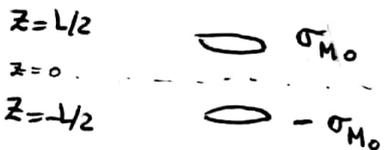
$$-\partial_z \phi \Big|_{-h^+} + \partial_z \phi \Big|_{-h^-} = 4\pi \underbrace{\chi_m (-\partial_z \phi)}_{\sigma_M} \Big|_{-h} \quad ; \quad [(\bar{H}^+ - \bar{H}^-) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_m]$$

$$\underbrace{(1 + 4\pi\chi_m)}_{\mu} \partial_z \phi \Big|_{-h^-} - \partial_z \phi \Big|_{-h^+} = 0 \quad ; \quad [(\bar{B}^+ - \bar{B}^-) \cdot \hat{n} = 0]$$

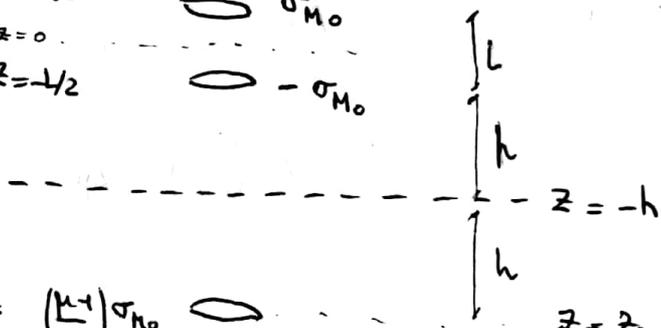
$$\Rightarrow \mu [B + Z(-h)] - [-B + Z(-h)] = 0 \quad ; \quad Z(z) = (*)$$

$$\therefore \boxed{B(k)} = - \frac{\mu - 1}{\mu H} \left(e^{-k(h+L/2)} - e^{-k(h-L/2)} \right)$$

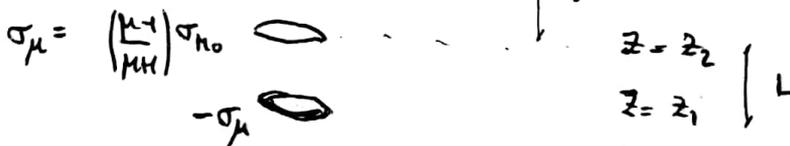
Si $z > -h$:
$$\phi_{\mu} = 2\pi a \left[- \left(\frac{\mu - 1}{\mu H} \right) H_0 \right] \int_0^{\infty} \frac{J_0(\rho) J_1(\rho)}{k} Z_{\mu}(z) dk$$



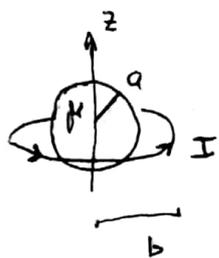
$$Z_{\mu}(z > -h) = e^{-k(z-z_1)} - e^{-k(z-z_2)}$$



$$\begin{cases} z_1 = -2h - L/2 \\ z_2 = -2h + L/2 \end{cases}$$



P9)



$$\vec{M} = \begin{cases} \chi \cdot \vec{H} & \text{si } r < a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

M.L.I.H : $\chi \equiv \chi_m$

\vec{B} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{J}_L + \vec{J}_M) \quad ; \quad \vec{J}_M = c \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

\vec{H} : $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$ (general)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_L$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 4\pi \rho_M \quad ; \quad \rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

a) fuentes de \vec{B} : (sólo en su rotor)

- corrientes libres (\vec{J}_L): espira de radio b con I
[son dato] en $z=0$

- corrientes magnéticas (de Magnetización):

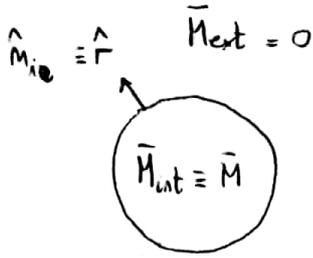
$$\vec{J}_M = c \vec{\nabla} \times \vec{M} = c \chi \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = c \chi \frac{4\pi}{c} \vec{J}_L = 0, \text{ en } r < a$$

↓
en el volumen abierto $r < a$

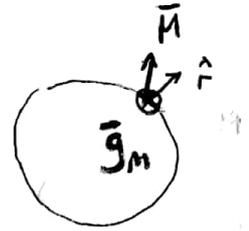
En superficie: Calculo salto de la componente tangencial en $r=a$

$$\vec{g}_M = -c \underbrace{(\vec{M}_{ext} - \vec{M}_{int})}_{=0} \times \underbrace{\hat{r}}_{\text{normal exterior}} = c \vec{M} \Big|_{r=a} \times \hat{r}$$

(int → ext.)
→ →



⇒ En general aparecen corrientes superficiales magnéticas en la interfase



fuentes para \vec{H} :

• En rotor : $\vec{J}_L = \frac{I \cdot \delta(\theta - \pi/2) \cdot \delta(r - b)}{r' \sin \pi/2} \hat{\phi}$ (idem \vec{B})

• En divergencia:

↳ en volumen ($r < a$) : $\boxed{\rho_{vol}^{(M)}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = -\vec{\nabla} \cdot (\chi \vec{H}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\chi \frac{\vec{B}}{\mu} \right)$
 $= -\frac{\chi}{\mu} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_{=0} = \boxed{0}$; $r < a$

χ, μ son uniprimos y ctes para $r < a$

en superficie ($r = a$) : $\boxed{\sigma_M} = -(\vec{M}_{ext} - \vec{M}_{int}) \cdot \hat{r}$
 $= \vec{M} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a}$

b) Teo. Helmholtz : $\vec{H} = \vec{H}_r + \vec{H}_d$ /

$\vec{\nabla} \times \vec{H}_d = 0 \Rightarrow \vec{H}_d = -\vec{\nabla} \phi_H \leftarrow$ fuentes en divergencia

$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_r = 0 \Rightarrow \vec{H}_r = \vec{\nabla} \times \vec{A}_H \leftarrow$ fuentes en rotos

c)

Parte solenoidal (fuentes en rotor, corrientes) : \vec{H}_r

Parte irrotacional (fuentes en divergencia, cargas) : \vec{H}_d

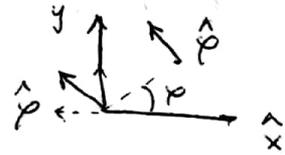
Para \vec{H}_r , calculo \vec{A}_H :

$$\vec{A}_H = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dV' \frac{\vec{J}_L(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dr' d\theta' d\varphi' \sin\theta' r'^2}{d\Omega'} \cdot \frac{\vec{J}_L(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{I}{c} \cdot b \int_{r'=b} d\Omega' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \delta(\theta' - \pi/2) \cdot \hat{\varphi}'$$

oscar : • $\hat{\varphi}' = -\sin\varphi' \hat{x} + \cos\varphi' \hat{y}$



$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \left(\frac{r_c^l}{r_{>l+1}} \right)$$

$$Y_{lm}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos\theta) \underbrace{e^{-im\varphi}}_{\cos(m\varphi) - i \sin(m\varphi)} ; P_{l,-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}$$

$$\vec{A}_H = 2 \frac{I}{c} \cdot b \pi \sum_{l=1}^{\infty} P_{l,1}(0) P_{l,1}(\cos\theta) \frac{(l-1)!}{(l+1)!} \left(\frac{r_c^l}{r_{>l+1}} \right)_{r,b} \cdot \hat{\varphi}$$

$$= 2 \frac{I}{c} \cdot b \pi \sum_{l \text{ impares}} \left(\frac{r_c^l}{r_{>l+1}} \right)_{r,b} P_{l,1}(0) P_{l,1}(\cos\theta) \left[\frac{(l-1)!}{(l+1)!} \right] \cdot \hat{\varphi} \parallel P_{l,1}(x) = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P_l(x)$$

Para \vec{H}_d , calculo ϕ_H con fuentes σ_H sobre $r=a \Rightarrow$

$$\phi_H = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos\theta) \cdot A_l \cdot \left(\frac{r_c^l}{r^{l+1}} \right)_{r,a} \quad \text{por sim. azimutal del problema.}$$

los coeficientes A_l los puedo plantear a partir de:

$$\underbrace{(\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int})}_{\vec{H}_{ext} - \mu \vec{H}_{int}} \cdot \hat{r} = 0 \quad \text{: evaluado en } r=a$$

$$\vec{H} = \vec{H}_d + \vec{H}_r \Rightarrow [(\vec{H}_d + \vec{H}_r)_{a^+} - \mu(\vec{H}_d + \vec{H}_r)_{a^-}] \cdot \hat{r} = 0$$

como \vec{H}_r es continuo en $r=a$, queda:

$$\underbrace{[\vec{H}_d]_{a^+} - \mu \vec{H}_d|_{a^-}} \cdot \hat{r} = (\mu-1) \vec{H}_r(r=a) \cdot \hat{r} \quad \text{(*)}$$

$$-\partial_r \phi_H|_{a^+} + \mu \partial_r \phi_H|_{a^-} = (\mu-1) \underbrace{(\vec{\nabla}_x \vec{A}_H)|_{r=a}} \cdot \hat{r}$$

\Rightarrow opero y despejo los A_l .

componente radial del rotor de \vec{A}_H evaluado en $r=a$

Obs: (*) se puede obtener equivalentemente de:

$$(\vec{H}_d|_{a^+} - \vec{H}_d|_{a^-}) \cdot \hat{r} = 4\pi \sigma_H$$