Hoy: Momentos multipolares.

Caso Eléctrico:

Dada una distribución de carga $\rho(\bar{r})$, tenemos un potencial:

$$\phi(\bar{x}) = \int d^3x' \, \frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|}$$

(Obs.: dependiendo de la convención, puede aparecer un factor $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$).

Y sabemos que:

$$\frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Vamos a definir entonces (fuera de la distribución):

$$\phi(\bar{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

donde

$$q_{lm} := \int d^3x' \, \rho(\bar{x}') \cdot r'^l \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

son los **momentos multipolares**.

En particular: $q_{00} = \int d^3x' \, \rho(\bar{x}') \cdot r^0 \cdot \overset{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}{Y_{00}} = \frac{Q_{total}}{\sqrt{4\pi}}$

$\bar{p} = \int \bar{x}' \rho(\bar{x}') \, d^3x'$

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \int (x' - iy') \cdot \rho(\bar{x}') \cdot d^3x' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot (p_x - i \cdot p_y)$$

Ejemplo: En el problema 3) b) Habíamos hallado

$$\phi(r>b>a) = \frac{(\bar{p}_a + \bar{p}_b)}{r^3} \cdot \bar{r} = (p_a + p_b) \cdot \frac{\cos(\theta)}{r^2} = \frac{(p_a + p_b)}{r^2} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot Y_{10}(\theta, \varphi)$$

con: $p_a = \left(E_0 - \frac{4}{3}\pi \cdot \sigma_0\right) \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot a^2$; $p_b = \frac{4}{3}\pi \cdot \sigma_0 \cdot b^3$

Entonces: $\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{q_{10}}{\cancel{r^2}} \cdot \cancel{Y_{10}} = \frac{p_a + p_b}{\cancel{r^2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot \cancel{Y_{10}}$

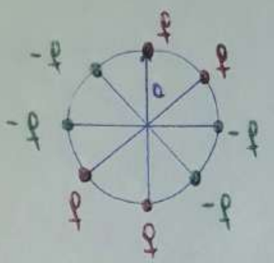
$$\Rightarrow q_{10} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot \sigma_0\right) \cdot \left[b^3 - a^3 \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\right)\right]$$

Por ortogonalidad todos los demás momentos serán nulos ⇒

$q_{lm} = 0$ para todo $l \neq 1$ y $m \neq 0$.

Otros ejemplos:

Calculemos los momentos multipolares (hasta cuadrupolar) de:



Para q_{00} sabemos que

$$q_{00} = \frac{Q_{Total}}{\sqrt{4\pi}}. \qquad \text{Entonces: } q_{00} = 0 \quad !!$$

Tenemos que $\rho(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{8} q_i \cdot \delta(\bar{r} - \bar{r}_i)$

y queremos calcular $q_{lm} = \int d^3x' \cdot \rho(\bar{x}') \cdot r'^{l} \cdot Y^*_{lm}(\theta', \varphi')$

Escribamos primero a ρ en esféricas (cargas en el plano x-y):

$$\rho = \sum_{i=1}^{8} q_i \cdot \frac{\delta(r-a) \cdot \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) \cdot \delta\left[\varphi - (i-1) \cdot \frac{\pi}{4}\right]}{r^2 \cdot \operatorname{sen}(\theta)}$$

Entonces, reescribiendo la integral de q_{lm} en polares:

$$q_{lm} = \sum_{i=1}^{8} \int dr' \cdot d\theta' \cdot d\varphi' \cdot \frac{r'^2 \cdot \operatorname{sen}(\theta')}{r'^2 \cdot \operatorname{sen}(\theta')} \cdot r'^{l} \cdot \delta(r'-a) \cdot \delta(\theta' - \tfrac{\pi}{2}) \cdot \delta\left[\varphi' - (i-1) \cdot \tfrac{\pi}{4}\right] \cdot Y^*_{lm}(\theta', \varphi') \cdot q_i$$

$$= \sum_{i=1}^{l} a^l \cdot q_i \cdot Y^*_{lm}\left[\frac{\pi}{2}, (i-1) \cdot \frac{\pi}{4}\right]$$

Chequeemos que $q_{00} = 0$.

$$\underline{\rho_{00}} = \sum_{i=1}^{8} Q^{0} \cdot \rho_i \cdot \underbrace{Y_{00}^*}_{cte.} = Y_{00}^* \cdot (4\rho - 4\rho) = \underline{0}$$

Tenemos que $Y_{10} \sim \cos(\theta) \Rightarrow Y_{10}(\frac{\pi}{2}, \varphi) = 0 \Rightarrow \underline{\rho_{10} = 0}$

Veamos entonces $\rho_{1\pm1}$:

$$q_{1\pm1} = \pm \sum_{j=1}^{8} Q \cdot \rho_j \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot e^{\mp i(j-1)\cdot\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \pm \frac{Q}{2} \cdot \rho \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left[-1 + e^{\mp i\frac{\pi}{4}} + e^{\mp i\frac{\pi}{2}} - e^{\mp i\frac{3\pi}{4}} - e^{\mp i\pi} + e^{\mp i\frac{5\pi}{4}} + e^{\mp i\frac{3\pi}{2}} - e^{\mp i\frac{7\pi}{4}}\right]$$

$$= \pm \frac{Q}{2} \cdot \rho \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \left[-1 + e^{\mp i\frac{\pi}{4}} + e^{\mp i\frac{\pi}{2}} - e^{\mp i\frac{3\pi}{4}}\right] \cdot \left(1 + \underbrace{e^{\mp i\pi}}_{-1}\right) = 0$$

$\Rightarrow q_{1\pm1} = 0 \Rightarrow$ ¡Tampoco tiene momento dipolar!

Veamos ahora ρ_{22}:

$$\underline{q_{22}} = \sum_{j=1}^{8} Q^2 \cdot \rho_j \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot e^{-2i\cdot(j-1)\cdot\frac{\pi}{4}} \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{Q^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \sum_{j=1}^{8} \rho_j \cdot e^{-i(j-1)\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{Q^2 \cdot \rho}{4} \cdot \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \left[-1 - i - 1 - i - 1 - i - 1 - i\right]$$

$$= \underline{Q^2 \cdot \rho \cdot \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot (-1 - i)}.$$

Análogamente pueden ver que $\rho_{2-2} = Q^2 \cdot \rho \cdot \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot (-1 - i)$

Entonces tiene un momento cuadrupolar NO NULO.

Caso magnético:

Para el caso magnético nos remitimos al potencial vector $\bar{A}$ generado por una distribución de corriente total $\bar{j}_{tot}$:

$$\bar{A} = \frac{1}{c} \cdot \int d^3r' \cdot \frac{\bar{j}_{tot}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

y pensamos: $\dfrac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{r^3} - \dfrac{1}{2}\dfrac{r'^2}{r^3} + \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(\bar{r}.\bar{r}')^2}{r^3} + \theta\left(\dfrac{r'^3}{r^3}\right)$

El primer término será:

$$\frac{1}{r.c} \cdot \int d^3r' \cdot \bar{j}_{tot}(\bar{r}') = 0$$

$$\downarrow$$

$$0 = \int \bar{r} . (\bar{\nabla} . \bar{j}_{tot}) . d^3r = \int \left[\bar{\nabla} . (\bar{j}_{tot} . \bar{r}) - \bar{j}_{tot} \right] \cdot d^3r = - \int \bar{j}_{tot} d^3r$$

El segundo:

$$\frac{1}{c.r^3} \int d^3r' \cdot \bar{j}_{tot}(\bar{r}') . (\bar{r}.\bar{r}') = \frac{1}{c.r^3} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \int \bar{j}_{tot} \times \bar{r}' . d^3r' \right] \times \bar{r}$$

$$\downarrow$$

Propiedades y cuentas de por medio.

Lo que motiva la definición del

Momento Dipolar Magnético:

$$\bar{m} := \frac{1}{2} \int \bar{r}' \times \bar{j}_{tot}(\bar{r}') . d^3r'$$

Los momentos de mayor orden conllevan algunas dificultades extra.

Por eso, en el caso magnético, el más importante es el dipolar.

Veamos un ejemplo:

Para el problema 7 (imán cilíndrico), Emilio había hallado

$$\bar{J}_{tot}(\bar{r}') = C.M_0.\hat{\varphi}'.\delta(\rho'-a).\Theta\left(\frac{L}{2}-z'\right).\Theta\left(\frac{L}{2}+z'\right)$$

Por lo tanto:

$$\bar{m} = \frac{1}{2}\int \bar{r}' \times \bar{J}_{tot}(\bar{r}').d^3r' = \frac{C.M_0}{2}.\int \bar{r}' \times \hat{\varphi}'.\delta(\rho'-a).\Theta\left(\frac{L}{2}-z'\right).\Theta\left(\frac{L}{2}+z'\right).\rho'.d\rho'.d\varphi'.dz'$$

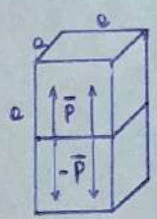
$$= \frac{C.M_0}{2}.\hat{z}.\int \rho'.\delta(\rho'-a).\Theta\left(\frac{L}{2}-z'\right).\Theta\left(\frac{L}{2}+z'\right).\rho'.d\rho'.d\varphi'.dz'$$

$$= \frac{C.M_0}{2}.\hat{z}.2\pi.L.a^2 = C.\pi.M_0.L.a^2.\hat{z}$$

——— o ———

Para terminar, resolvamos otro ejemplo del caso eléctrico:

Se tienen dos cubos con polarización uniforme unidos como en el dibujo:



Vimos que una distribución de momento dipolar $\bar{P}$ es equivalente a una densidad de carga inducida $\rho = -\bar{\nabla}.\bar{P}$.

El problema se reduce entonces a escribir la densidad:

solo tiene componente $\hat{z} \Rightarrow \bar{P} = P.\hat{z}.f(x,y,z)$.

Sabemos que vale P en la región $\begin{cases} -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} < y < a/2 \\ 0 < z < a \end{cases}$

" $-P$ " $\begin{cases} \dots \\ \dots \\ -a < z < 0 \end{cases}$

Podemos escribirlo con la función θ como:

$$\bar{P} = \hat{z}.P.\underbrace{\left[2.\theta(z) - 1 - \theta(z-a) + \theta(-z-a)\right]}_{:= f(z,a)} . f(x,\tfrac{a}{2}) . f(y,\tfrac{a}{2})$$

Entonces: $\rho = -\bar{\nabla}.\bar{P} = P.\left[\delta(z-a) + \delta(-z-a) - \delta(z)\right].f(x,\frac{a}{2}).f(y,\frac{a}{2})$

Ahora queremos calcular:

$$q_{lm} = \int d^3x'.\rho(\bar{x}').r'^{l}.Y^{*}_{lm}(\theta',\varphi').$$

La carga total es cero, por lo que

$$\underline{q_{00} = 0}$$

Calculemos q_{10}:

Recordemos que $Y_{00} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \cos\theta$.

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) & \text{si } z>0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } z=0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) + \pi & \text{si } z<0 \end{cases}$$

Entonces

$$q_{10} = \int dx'.dy'.dz'.\overbrace{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}^{r'^1}.\frac{\cos(\theta)}{2}.\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot P.\left[\delta(z-a)+\delta(-z-a)-\delta(z)\right].f(x,\tfrac{a}{2}).f(y,\tfrac{a}{2})$$

$\cos(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$= \int dx'.dy'.\sqrt{\frac{3}{4\pi}}.P.f(x,\tfrac{a}{2}).f(y,\tfrac{a}{2}).\left[\frac{a}{\sqrt{x'^2+y'^2+a^2}} - \frac{a}{\sqrt{x'^2+y'^2+a^2}}\right].\sqrt{x'^2+y'^2+a^2}$$

$$= 0$$

Los demás los pueden calcular ustedes.

(Pista: $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$).