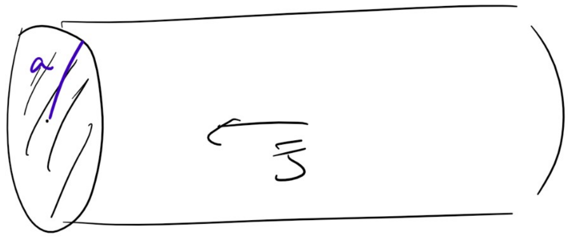
Física Teórica 1, 2do cuatrimestre 2021

Clase 20/10: Guía 5, cuasiestacionario

3)



$I = I_0 \cos(\omega t)$

Aproximación cuasiestacionaria: frecuencia chica

Planteo dependencia oscilatoria con el tiempo:

$$\bar{E}(\bar{r},t) = \bar{E}(\bar{r})e^{i\omega t} \qquad \bar{B}(\bar{r},t) = \bar{B}(\bar{r})e^{i\omega t} \qquad \bar{J}(\bar{r},t) = \bar{J}(\bar{r})e^{i\omega t}$$

con $\bar{E}(\bar{r})$, $\bar{B}(\bar{r})$, $\bar{J}(\bar{r})$ funciones complejas. (Al final tomo parte real.)

También uso la ley de Ohm $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ porque tengo un conductor. Las ecs. de Maxwell sin carga quedan

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0 & \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \\ \bar{\nabla}\times\bar{E} = -i\frac{\omega}{c}\bar{B} & \bar{\nabla}\times\bar{B} = \frac{4\pi}{c}\bar{J} + i\frac{\omega}{c}\bar{E} = \frac{4\pi\sigma + i\omega}{c}\bar{E} \end{cases}$$

Me dicen que desprecie el término $i\frac{\omega}{c}\bar{E}$. Para la corriente alterna tengo $\boxed{\frac{\omega}{2\pi} \sim 50\text{-}60\ \text{Hz}.}$ La conductividad del cobre es $\boxed{\sigma \sim 6\times 10^7\ (\Omega m)^{-1}}$. En CGS (divido por $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$), esto es $\boxed{\sigma \sim 5\times 10^{17}\ \text{Hz}.}$

$\hookrightarrow$ Es realista suponer $\sigma \gg \omega$!

Llego a

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0 & \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \\ \bar{\nabla}\times\bar{E} = -i\frac{\omega}{c}\bar{B} & \bar{\nabla}\times\bar{B} = \frac{4\pi\sigma}{c}\bar{E} \end{cases}$$

a) Hallar los campos en el interior.

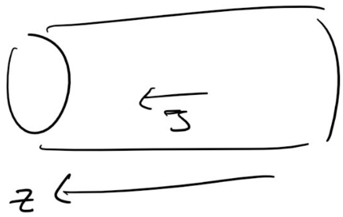
Opción 1: Plantear serie de potencias en ω y resolver orden por orden.

Opción 2: Resolver directamente.

Tomo rotor del rotor de $\bar{E}$:

$$\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{E}) = -i\frac{\omega}{c}\bar{\nabla}\times\bar{B} \rightarrow \nabla^2\bar{E} = i\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}\bar{E}$$

Simetrías:



(cilíndricas)

- Sólo dependencia con ρ (no φ ó z).
- Por simetría de reflexión (ó $\bar{\nabla}\times\bar{E}=0$) elimino E_φ.
- Por $\bar{\nabla}\cdot\bar{E}=0$ elimino E_ρ.
- Por simetría de reflexión elimino B_z.
- Por $\bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0$ elimino B_ρ.

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\bar{E} = E(\rho)\hat{z}, \quad \bar{J} = \sigma\bar{E} \\ &\bar{B} = B(\rho)\hat{\varphi}\end{aligned}}$$

Resuelvo: $\nabla^2\bar{E} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dE}{d\rho}\right)\hat{z} = \boxed{i\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}}E\hat{z}$

$\rightarrow k^2 = -i\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}$, $k = (1-i)\frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}$ $\rightarrow$ es complejo!

$$\frac{d^2E}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dE}{d\rho} = -k^2E \longrightarrow \rho^2\frac{d^2E}{d\rho^2} + \rho\frac{dE}{d\rho} + k^2\rho^2E = 0$$

$$\rho^2 \frac{d^2E}{d\rho^2} + \rho \frac{dE}{d\rho} + u^2\rho^2 E = 0$$

↳ Ec. de Bessel de orden 0

Sol: $\boxed{E = A J_0(u\rho)}$ con A a determinar.

La normalización sale con el dato de la corriente total: $\iint J\, dS = I_0$

(se puede mostrar que es válido hacer esto con la J compleja)

Hago la integral:

$$J = \sigma E = \sigma A J_0(u\rho)$$

$$\iint J\, dS = 2\pi\sigma A \int_0^a d\rho\, \rho\, J_0(u\rho) \overset{x = u\rho}{=} \frac{2\pi\sigma A}{u^2}\int_0^{ua} dx\, x\, J_0(x)$$

Uso la identidad $x J_0(x) = \frac{d}{dx}\left(x J_1(x)\right)$

$$\iint J\, dS = \frac{2\pi\sigma A}{u^2}\, ua\, J_1(ua) = \frac{2\pi\sigma a A}{u} J_1(ua) = I_0$$

→ despejo A y tengo

$$\boxed{E = \frac{u I_0}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(u\rho)}{J_1(ua)}}$$

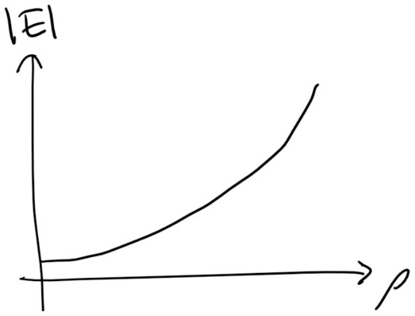
$$\boxed{J = \frac{u I_0}{2\pi a} \frac{J_0(u\rho)}{J_1(ua)}}$$

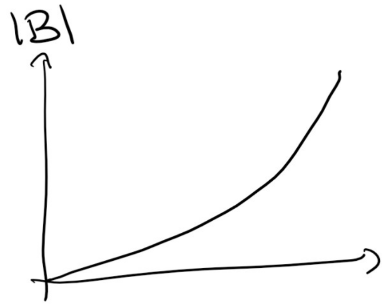
→ No olvidar que el campo físico es

$$\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{I_0}{2\pi\sigma a} \mathrm{Re}\left[u \frac{J_0(u\rho)}{J_1(ua)} e^{i\omega t}\right]$$

Saco B con $\bar\nabla \times \bar E = -i\frac{\omega}{c}\bar B$; en cilíndricos, $\bar\nabla \times \bar E = -\frac{dE}{d\rho}\hat\varphi$

$$\boxed{\rightarrow B = -i\frac{c}{\omega}\frac{dE}{d\rho} = -i\frac{2 I_0}{ca}\frac{J_1(u\rho)}{J_1(ua)}}$$





b) De $u = (1-i)\dfrac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}$ definimos el skin depth $\delta = \dfrac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$

Caso (i): $a \ll \delta$ (y por lo tanto también $\rho \ll \delta$).

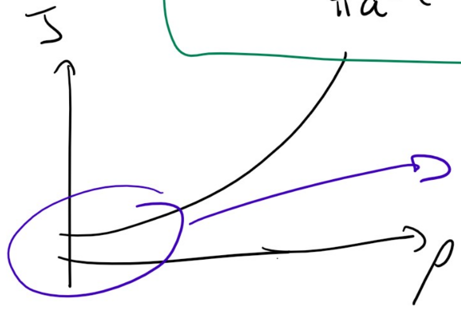
Uso $J_0(z) \approx 1 - \dfrac{z^2}{4}$ para $|z|$ chico.

$J_1(z) \approx \dfrac{z}{2}$

Simplifico un poco y llego a

$$\boxed{J \approx \frac{I_0}{\pi a^2}\left(1 + \frac{i}{2}\frac{\rho^2}{\delta^2}\right) = \frac{I_0}{\pi a^2}\left(1 + i\frac{\pi\sigma\omega}{c^2}\rho^2\right)}$$

$$\boxed{|J| \approx \frac{I_0}{\pi a^2}\left(1 + \frac{\rho^4}{8\delta^4}\right) = \frac{I_0}{\pi a^2}\left(1 + \frac{\pi^2\sigma^2\omega^2}{2c^4}\rho^4\right)}$$



estoy haciendo zoom en esta parte

Caso (ii): $a \gg \delta$ (y supongo $\rho \gg \delta$ también)

Uso $J_n(z) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$, válida para $|z| \to \infty$ y $-\pi < \arg z < 0$

Simplifico bastante y llego a

$$\boxed{J \approx (1+i)\frac{I_0}{2\pi\delta\sqrt{2a\rho}}\, e^{(1+i)\frac{\rho-a}{\delta}}} \to \boxed{|J| \approx \frac{I_0}{\pi\delta\sqrt{2a\rho}}\, e^{\frac{\rho-a}{\delta}}}$$

c) Potencia disipada por unidad de volumen:

$u = \bar{J} \cdot \bar{E}$ → pero usando las cantidades físicas (reales)

Se puede ver que si promedio en un período,

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(J E^*) = \frac{1}{2\sigma} |J|^2$$

La potencia total disipada es $\langle W \rangle = \iint \langle u \rangle dS$, y puedo sacar la potencia equivalente a partir de

$\langle W \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R$ (no olvidar que tenemos corriente alterna).

Caso (i): $\delta \gg a$

$$|J|^2 \approx \frac{I_0^2}{\pi^2 a^4}\left(1 + \frac{\pi^2 \sigma^2 \omega^2}{c^4} \rho^4\right)$$

$$\langle W \rangle = 2\pi \int_0^a d\rho\, \rho \frac{1}{2\sigma} |J|^2 = \frac{I_0^2}{\pi \sigma a^4} \int_0^a d\rho\, \rho \left(1 + \frac{\pi^2 \sigma^2 \omega^2}{c^4} \rho^4\right)$$

$$= \frac{I_0^2}{\pi \sigma a^4}\left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{6} \frac{\pi^2 \sigma^2 \omega^2}{c^4} a^6\right) = \frac{I_0^2}{2\pi a^2 \sigma}\left(1 + \frac{\pi^2 \sigma^2 \omega^2 a^4}{3 c^4}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}\left(1 + \frac{\pi^2 \sigma^2 \omega^2 a^4}{3 c^4}\right)}$$

$\rightarrow \frac{1}{12}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4$

Caso (ii): $\delta \ll a$

$$|J|^2 \approx \frac{I_0^2}{2\pi^2 \delta^2 a \rho} e^{2\frac{\rho - a}{\delta}}$$

$$\langle W \rangle = 2\pi \int_0^a d\rho\, \rho \frac{1}{2\sigma} |J|^2 = \frac{I_0^2}{2\pi \delta^2 a \sigma} \int_0^a d\rho\, e^{2\frac{\rho - a}{\delta}}$$

$$= \frac{I_0^2}{4\pi \delta a \sigma}\left(1 - e^{-\frac{2a}{\delta}}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma}\left(1 - e^{-\frac{2a}{\delta}}\right)}$$

Corriente superficial efectiva:

g tal que $\int g\, dl = I_0 \rightarrow$ por simetría axial,

$$\boxed{g = \frac{I_0}{2\pi a}}$$

d) Caso general:

$$J = \frac{k I_0}{2\pi a} \frac{J_0(k\rho)}{J_1(ka)} \quad \text{con} \quad k = \frac{1-i}{\delta} = (1-i)\frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}$$

$$\langle w \rangle = 2\pi \int_0^a d\rho\, \rho \frac{1}{2\sigma}|J|^2 = \frac{I_0^2}{4\pi a^2 \sigma} \frac{|k|^2}{|J_1(ka)|^2} \int_0^a d\rho\, \rho\, |J_0(k\rho)|^2,$$

$$R = \frac{1}{2\pi a^2 \sigma} \frac{|k|^2}{|J_1(ka)|^2} \int_0^a d\rho\, \rho\, |J_0(k\rho)|^2$$

defino $x = \rho/a$, $\omega_0 = \frac{c^2}{2\pi a^2 \sigma}$, $R_0 = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}$

$$= R_0 \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\left|J_1\left((1-i)\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}}\right)\right|^2} \int_0^1 dx\, x \left| J_0\left((1-i)\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}}\, x\right)\right|^2$$