

FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2021

PRÁCTICA DEL 27/11: GUÍA 6 - ONDAS PLANAS EN CONDUCTORES

Repaso Coeficientes de Fresnel

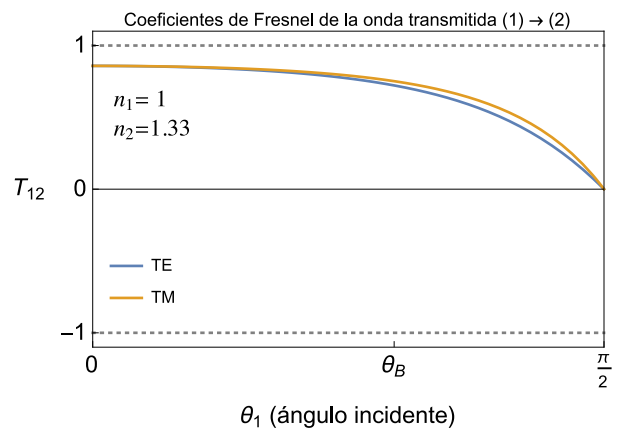
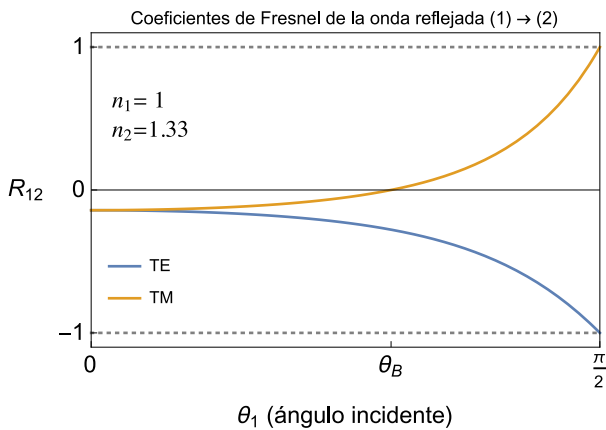
Incidencia TE:

$$\text{Coeficientes de Fresnel (TE)} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{12} \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{\bar{n}_1 - \bar{n}_2}{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} \\ T_{12} \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\bar{n}_1}{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} \end{array} \right. \quad \bar{n}_i \equiv \frac{n_i \cos \theta_i}{\mu_i}$$

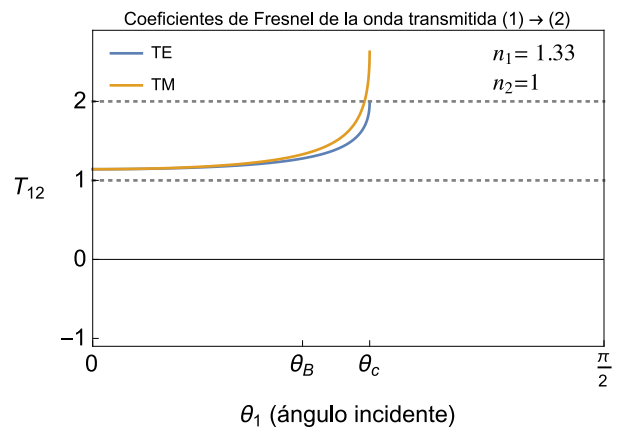
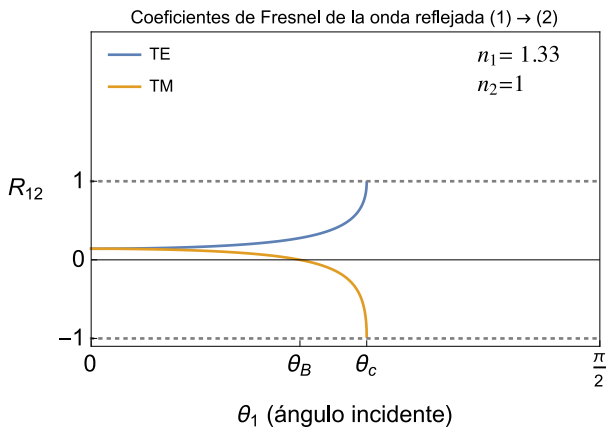
Incidencia TM:

$$\text{Coeficientes de Fresnel (TM)} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{12} \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \\ T_{12} \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \left(\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \right) \end{array} \right. \quad \tilde{n}_i \equiv \frac{n_i}{\mu_i \cos \theta_i}$$

De menor a mayor densidad:



De mayor a menor densidad:



Fenómenos interesantes:

(i) $R_{12}^{TM} = 0 \implies$ Ángulo de Brewster θ_B ,

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1}$$

tal que si $\theta_1 = \theta_B$ no hay onda reflejada con polarización TM.

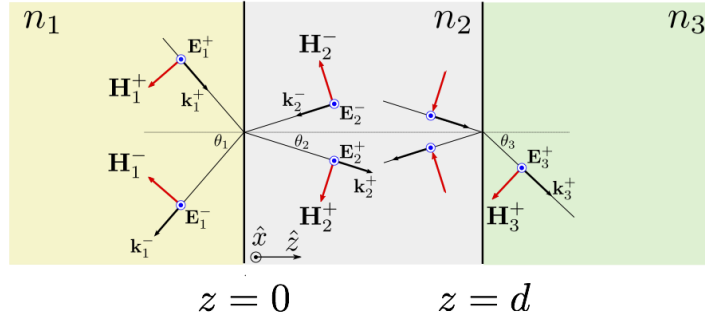
(ii) Reflexión total interna para $\theta_1 \geq \theta_c$, con el ángulo crítico θ_c tal que $\sin(\theta_c) = n_2/n_1$.

$$\implies \cos \theta_2 = i \sqrt{(n_1 \sin \theta_1 / n_2)^2 - 1}$$

No hay flujo del valor medio del vector de Poynting en la dirección perpendicular a la interfase: $\hat{z} \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle = 0$

Retomamos problema 2: Onda incidente sobre lámina de espesor d (problema de 2 interfases).

Caso incidencia TE:



$$\mathbf{E}_1^\pm(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[E_1^\pm e^{i(\mathbf{k}_1^\pm \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \hat{x} \quad ; \quad E_1^+ \equiv E_i$$

$$\mathbf{E}_2^\pm(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[E_2^\pm e^{i(\mathbf{k}_2^\pm \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \hat{x}$$

$$\mathbf{E}_3^+(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[E_3^+ e^{i(\mathbf{k}_3^+ \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \hat{x} \quad ; \quad E_3^- = 0$$

Obtuvimos:

$$R \equiv \frac{E_1^-}{E_1^+} \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{R_{12} + R_{23} e^{2i\alpha_2}}{1 + R_{12} R_{23} e^{2i\alpha_2}}$$

$$T \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{T_{12} T_{23} e^{i\alpha_2}}{1 + R_{12} R_{23} e^{2i\alpha_2}} \quad \alpha_2 = d k_2 \cos \theta_2$$

(c) Para $\theta_1 = 0$, calcular el **promedio temporal** de los vectores de Poynting

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

en los tres medios y verificar que son iguales.

$$\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c n_1}{8\pi \mu_1} (1 - |R|^2) E_i^2 \hat{z} \quad (\theta_1 = \theta_2 = 0)$$

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c n_3}{8\pi \mu_3} |T|^2 E_i^2 \hat{z} \quad (\theta_1 = \theta_2 = 0)$$

Por balance de energía (teorema de Poynting) promediado:

$$\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{S}_2(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle$$

(d) Para $\theta_1 = 0$, ¿qué condición deben cumplir d y los ϵ_i para que no haya onda reflejada en el medio 1?

Para responder debemos mirar el coeficiente R calculado en el ítem (b) de este apunte:

$$R \equiv \frac{E_1^-}{E_1^+} \Big|_{\mu_i=1; \theta_1=0} = \frac{n_2(n_1 - n_3) \cos \alpha_2 + i(n_2^2 - n_1 n_3) \sin \alpha_2}{n_2(n_1 + n_3) \cos \alpha_2 - i(n_2^2 + n_1 n_3) \sin \alpha_2}$$

y anular la parte real y la parte imaginaria, esto es:

$$\begin{aligned} n_2(n_1 - n_3) \cos \alpha_2 &= 0 \\ (n_2^2 - n_1 n_3) \sin \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Para anularlas debe ser

$$n_1 = n_3 \quad , \quad n_2^2 = n_1 n_3 \quad : \text{ no hay interfases en este caso}$$

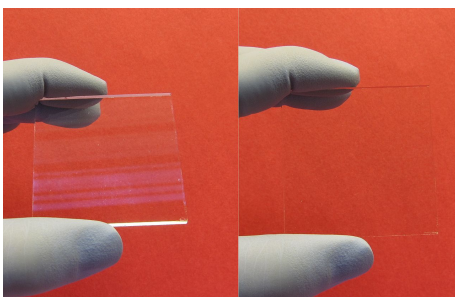
$$\boxed{n_1 = n_3 \quad , \quad \sin \alpha_2 = 0} \implies \alpha_2 \equiv k_2 d = m\pi \implies m\lambda_2 = 2d, \quad m \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$\boxed{\cos \alpha_2 = 0 \quad , \quad n_2^2 = n_1 n_3} \implies \alpha_2 \equiv k_2 d = (2m - 1)\pi/2 \implies (2m - 1)\lambda_2 = 4d, \quad m \in \mathbb{N} \quad (2)$$

El caso (1) se puede entender pensando en múltiples reflexiones y en términos de la longitud de onda en el medio 2: la fase acumulada debida a un viaje de ida y vuelta por el medio de espesor d es, en este caso, $2m\pi$. Al tener en cuenta que se tiene una fase extra π obtenida en alguna de las reflexiones -ya sea de la que se produce en $1 \rightarrow 2$, o la de $2 \rightarrow 3$ (que se obtiene cuando $n_{inc} < n_{tran}$ en el caso TE; mirar el cambio de signo en el coeficiente de Fresnel R_{ij})- queda un desfase neto de medio ciclo (π) que tiende a la cancelación de las múltiples ondas que aportan a la reflejada en el medio 1.

El caso (2) se puede entender de la misma manera pero involucrando un número par de fases π obtenidas por reflexión, dado que la fase acumulada en el viaje de ida y vuelta en este caso es siempre de medio ciclo.

Pidiendo, en cambio, $|R| = 1$ se puede obtener el efecto inverso; interferencia constructiva de las ondas reflejadas que vuelven hacia el medio 1.



Ejemplos de anti reflejo y reflexión constructiva

Problema 6: Reflexión y transmisión en un buen conductor

Considerar el problema de incidencia de una onda plana sobre una interfase vacío–conductor óhmico. El conductor ocupa el semiespacio $0 < z$. Asumir que $\epsilon' = \mu' = 1$ en todo el espacio, y que la conductividad σ del conductor es independiente de la frecuencia. Asimismo, asumir que $\omega \ll \sigma$. La onda incide desde el vacío con un ángulo θ .

(a) Encontrar la relación de dispersión $k(\omega)$ en el conductor.

Las ecuaciones de Maxwell dentro de un conductor óhmico donde $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, y con $\mu' = \epsilon' = 1$, son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Vamos a considerar soluciones de ondas planas en el interior del conductor

[usaremos notación compleja, pero los campos físicos se obtienen de tomar $\Re[\dots]$ o $\Im[\dots]$]

$$\mathbf{E} = E e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{v}_E, \quad \mathbf{B} = B e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{v}_B, \quad (\hat{v}: \text{versores})$$

Reemplazando en las dos primeras ecuaciones se tiene que: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}$, mientras que de las otras dos se obtiene

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c} \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}.$$

Tomando $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})^*$ y usando la última para deshacerse de \mathbf{B} , llegamos a que el producto escalar del vector de onda \mathbf{k} consigo mismo es

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \equiv k^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left[1 + 2i \left(\frac{c}{\omega\delta} \right)^2 \right], \quad (4)$$

donde definimos el parámetro *longitud de penetración* (o *espesor pelicular*) en el conductor como

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}, \quad (5)$$

y el vector número de onda complejo

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_f + i \mathbf{k}_a \quad ; \quad \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_a \in \mathbb{R}^3$$

El índice de refracción puede leerse de la definición

$$k(\omega) = n' \frac{\omega}{c} \quad ; \quad n' = \left[1 + 2i \left(\frac{c}{\omega\delta} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

La definición de buen conductor es

$$\delta \ll \lambda_0 = c/\omega$$

*ver material adicional en la página web [link: Tabla identidades vectoriales.]

o, como indica el enunciado, considerar

$$\omega \ll \sigma .$$

Esto permite despreciar el término de corrientes de desplazamiento frente al de corrientes en un muy buen conductor, en las ecuaciones de Maxwell. Esta aproximación corresponde a prescindir del término real en la ecuación (4), es decir

$$k^2 \simeq \frac{2i}{\delta^2},$$

tal que la relación de dispersión bajo la aproximación de buen conductor es

$$k(\omega) \simeq \frac{1+i}{\delta}, \quad (6)$$

y el índice de refracción para un buen conductor queda

$$n' \simeq \frac{c}{\omega\delta}(1+i). \quad (7)$$

(b) *Encontrar el vector de onda en el conductor, eligiendo la solución que es apropiada para la región $0 < z$. Escribir explícitamente la parte real y la parte imaginaria del vector de onda. ¿En qué dirección se propaga la onda transmitida? ¿En qué dirección se atenúa? ¿Cuál es la longitud típica de atenuación? ¿Qué pasa con la dirección de propagación a medida que el espesor pelicular $\delta \rightarrow 0$?*

El conductor se ubica en el espacio semi infinito con $z < 0$, la incidente se propaga desde los $z > 0$, en vacío, con número de onda $k_0 = \omega/c$ y ángulo de incidencia θ . Planteamos el problema para el caso Transverso Eléctrico. Los campos incidente, reflejado y transmitido son (TE):

$$\mathbf{E}_0 = E_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{x}, \quad \mathbf{E}_r = E_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{x}, \quad \mathbf{E} = E e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{x},$$

en donde los vectores de onda quedan definidos por

$$\mathbf{k}_0 = k_{0y} \hat{y} + k_{0z} \hat{z}, \quad \mathbf{k}_r = k_{ry} \hat{y} + k_{rz} \hat{z}, \quad \mathbf{k} = k_y \hat{y} + k_z \hat{z}. \quad (8)$$

La ley de Snell establece que

$$k_{0y} = k_{ry} = k_y$$

por lo que k_y es real. Equivalentemente, tenemos que

$$k_0 \sin \theta = k \sin \theta',$$

el ángulo de transmisión θ' queda definido a partir del valor de $\sin \theta'$, en función de θ , k_0 y k , que será complejo ya que $k \in \mathbb{C}$.

Por otro lado, la componente k_z de del vector \mathbf{k} será compleja para poder satisfacer la relación de dispersión dada por k^2 en el conductor. Entonces escribimos

$$k_z = k' + ik'',$$

de modo que al hacer el producto escalar de \mathbf{k} consigo mismo tenemos

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (k_0 \sin \theta)^2 + k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' . \quad (9)$$

Igualando las partes reales e imaginarias de la expresión anterior con (4), y luego de resolver una cuártica (para esto recomiendo usar algún programa de cálculo, por ejemplo, el Mathematica), se obtiene que

$$\begin{aligned} k' &= -\frac{1}{\delta} \sqrt{(1 + \beta^2)^{1/2} + \beta} \\ k'' &= -\frac{1}{\delta} \sqrt{(1 + \beta^2)^{1/2} - \beta} \end{aligned} \quad ; \quad \text{donde } \beta = \frac{\delta^2 k_0^2 \cos^2 \theta}{2}$$

Considerando la aproximación de un buen conductor, $\beta \ll 1$, el orden dominante es

$$\begin{aligned} k' &\simeq -\delta^{-1} \\ k'' &\simeq -\delta^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

La solución de (9) para las componentes del número de onda satisface las ecuaciones de Maxwell dentro del conductor y las condiciones de contorno para la onda transmitida con

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}_f + i \mathbf{k}_a \\ \mathbf{k}_f &= k_y \hat{y} + k' \hat{z} \\ \mathbf{k}_a &= k'' \hat{z} \end{aligned}$$

esto es,

$$\mathbf{E} = E e^{-z k''} e^{i(y k_0 \sin \theta + z k' - \omega t)} \hat{x} ;$$

- $k' \simeq -\delta^{-1} < 0$ es la parte real de la componente k_z y determina que la propagación en esa dirección sea en sentido de $-\hat{z}$, es decir, hacia el interior del conductor.
- $k'' \simeq -\delta^{-1}$ produce una atenuación del campo hacia los z negativos en una longitud característica δ . Entonces, las superficies de amplitud constante quedan dadas por: $z k'' = cte$, esto es; los planos de amplitud constante son paralelos a la interfase.
- Las superficies de fase constante son los planos: $y k_0 \sin \theta + z k' = cte$. La dirección de propagación es perpendicular a los planos de fase constante y el ángulo de refracción *real* ψ de la onda transmitida respecto a la normal a la interfase $\hat{\perp} = -\hat{z}$, puede definirse a partir de

$$\sin \psi = \frac{k_y}{(k_y^2 + k'^2)^{1/2}} \simeq \delta k_0 \sin \theta .$$

A mayor conductividad o menor frecuencia el ángulo $\psi \rightarrow 0$ y la propagación en el conductor queda en la dirección normal a la superficie. Para un metal como el cobre $\sigma \simeq 5 \times 10^{17} s^{-1}$, a una frecuencia baja de 60Hz se tiene un espesor pelicular $\delta \simeq 1cm$ y $\psi \simeq (10^{-7})^\circ$. Para materiales no metálicos con menor conductividad, el ángulo ψ también puede ser aproximadamente cero; en agua de mar $\sigma \simeq 5 \times 10^{10} s^{-1}$, y a una frecuencia de 100kHz se obtiene $\delta_{agua}^{100kHz} \simeq 70cm$ y $\psi_{agua}^{100MHz} \simeq 0, 1^\circ$.

(c) *Encontrar las amplitudes (complejas) de las ondas reflejadas y transmitidas. Estudiar el límite $\delta \rightarrow 0$. Considerar los casos TE y TM.*

(seguimos sólo con el caso TE)

De la continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético en la interfase vacío–buen conductor (ubicada en $z = 0$), con permeabilidades $\mu = 1$ en todo el espacio, se tiene el sistema

$$E_0 + E_r = E, \quad k_{0z} E_0 + k_{rz} E_r = k_z E.$$

Reemplazando $k_{rz} = -k_{0z}$, se puede escribir los coeficientes de reflexión y transmisión en término de las componentes de los números de onda como

$$R = \frac{E_r}{E_0} = \frac{k_{0z} - k_z}{k_{0z} + k_z}, \quad T = \frac{E}{E_0} = \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_z}. \quad (11)$$

Apéndice: podemos hacer el ejercicio de llegar a estas expresiones partiendo de la forma tradicional de escribir los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión para incidencia TE en un ángulo θ . Estos estaban resueltos en el Problema 1 y podemos escribirlos como

$$R_{Fresnel}^{TE} = \frac{(n/\mu) \cos \theta - (n'/\mu') \cos \theta'}{(n/\mu) \cos \theta + (n'/\mu') \cos \theta'}, \quad T_{Fresnel}^{TE} = \frac{2(n/\mu) \cos \theta}{(n/\mu) \cos \theta + (n'/\mu') \cos \theta'}$$

Los parámetros sin primar corresponden al semiespacio vacío desde donde incide la onda plana, y los primados al conductor. Reemplazado $\mu = \mu' = 1$ y $n' = \frac{k}{\omega/c}$ llegamos a la siguiente expresión de R y de T)

$$R = \frac{k_0 \cos \theta - k \cos \theta'}{k_0 \cos \theta + k \cos \theta'}, \quad T = \frac{2k_0 \cos \theta}{k_0 \cos \theta + k \cos \theta'} \quad (12)$$

Los cosenos de los ángulos incidente y transmitido, como se usan en los coeficientes de Fresnel, están definidos a partir de la normal a la interfase $\hat{\perp}$ que apunta desde el medio de incidencia hacia el refractante mediante el producto escalar, esto es:

$$\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\perp} \equiv k_0 \cos \theta \doteq k_{0\perp} (= -k_{0z}), \quad \mathbf{k} \cdot \hat{\perp} \equiv k \cos \theta' \doteq k_{\perp} (= -k_z).$$

Reemplazando esto último en (12), los coeficientes quedan escritos como en (11) (sin hacer mención de los ángulos)

$$R = \frac{k_{0\perp} - k_{\perp}}{k_{0\perp} + k_{\perp}}, \quad T = \frac{2k_{0\perp}}{k_{0\perp} + k_{\perp}}.$$

Volviendo a la interfase vacío–buen conductor del problema, usando $k_{0z} = -k_0 \cos \theta$ y $k_z \simeq -(1+i)/\delta$ se obtiene

$$R \simeq -1 + (1-i)k_0\delta \cos \theta, \quad (13)$$

donde se retuvieron términos a primer orden en $k_0\delta \sim (\omega/\sigma)^{1/2} \gg (\omega/\sigma)$. Análogamente, el coeficiente de transmisión queda

$$T \simeq (1-i)\delta k_0 \cos \theta. \quad (14)$$

Observaciones:

(i) Las amplitudes reflejada y transmitida son casi independientes del ángulo de incidencia en la mayoría de los metales a frecuencias menores al THz.

(ii) En un conductor ideal, $\delta \rightarrow 0$, no hay onda transmitida: Los campos se anulan en el interior del conductor, el campo eléctrico exterior es normal al conductor y se produce una corriente superficial sobre la interfase (debido a que el espesor pelicular δ tiende a cero) encargada de conservar la componente tangencial de \mathbf{H} sobre la interfase.

(d) *Demostrar que para un buen conductor el coeficiente de reflexión es aproximadamente $r \approx 1 - 2\delta\omega/c$.*

El **coeficiente de intensidad reflejada** r se define como el cociente entre el flujo de la energía de la onda reflejada y de la incidente,

$$r = \frac{\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{E}_r^*}{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*} = \frac{E_r E_r^*}{E_0 E_0^*} = RR^* = |R|^2 \approx 1 - 2\delta k_0 \cos \theta. \quad (15)$$

Para incidencia normal se obtiene el resultado que pide el ítem (d) del problema.

Problema propuesto:

Estudiar el balance de energía dentro del conductor:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V d^3r u \right) + \int_V d^3r \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = - \oint_A d^2r \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$$

donde

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Plantear el balance de energía en una columna de área unidad que se extiende desde la superficie del conductor hasta una distancia z dentro de él, usando la aproximación de buen conductor. (El volumen V sería un cilindro de sección unidad A y de longitud z). Esto involucra el cálculo del vector de Poynting y el de la energía disipada por efecto Joule dentro del conductor.