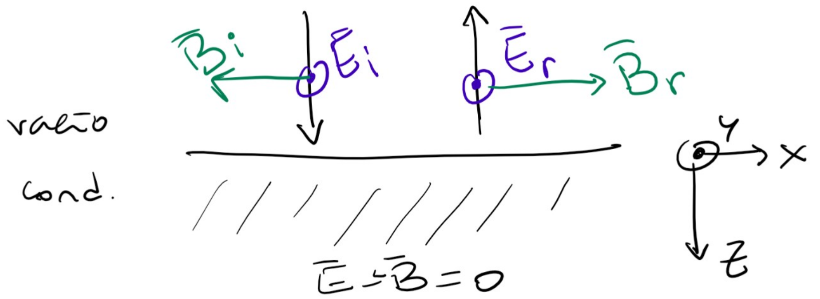
Física Teórica 1, 2do cuatrimestre 2021

Clase 1/11 : Guía 6, ondas

Problema 8

Presión de radiación

a) Una onda incide normalmente sobre un conductor perfecto $\rightarrow \bar{E} = \bar{B} = 0$ dentro del conductor



$\bar{B}_i = \hat{a}_i \times \bar{E}_i$

$\bar{B}_r = a_r \times \bar{E}_r$

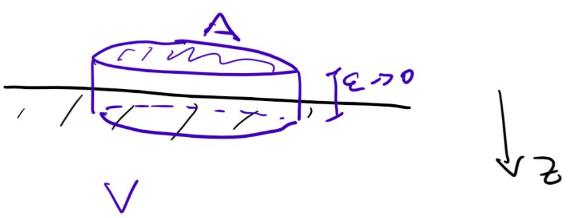
Cond. de contornos: continuidad de $\bar{E}$ tangencial

$E_{i_y} + E_{r_y} = 0$ (porque $\bar{E} = 0$ en el conductor)

$$\rightarrow \bar{E}_i = E_0 \hat{y}\, e^{i(kz-\omega t)} \qquad \bar{B}_i = -E_0 \hat{x}\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\bar{E}_r = -E_0 \hat{y}\, e^{i(-kz-\omega t)} \qquad \bar{B}_r = -E_0 \hat{x}\, e^{i(kz-\omega t)}$$

Para calcular la presión uso el tensor de Maxwell:



$$\bar{F} = \iint \bar{\bar{T}} \cdot d\bar{S} = \iint_{z=0} \bar{\bar{T}} \cdot d\bar{S}$$

Tengo que $d\bar{S} = -\hat{z}\, dS \Rightarrow F_i = -\iint T_{iz}\, dS$

$$T_{iz} = \frac{1}{4\pi}\left(E_i \cancel{E_z} + B_i \cancel{B_z} - \frac{1}{2}\delta_{iz}(E^2+B^2) \right)$$

La única componente es $T_{zz} = -\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)$

$$\Rightarrow F_z = \frac{1}{8\pi}\iint (E^2+B^2)\, dS = \frac{1}{8\pi}(E^2+B^2) A$$

porque los campos no dependen de x o y

Finalmente, saco valor medio:

$$\boxed{P = \frac{F}{A} = \frac{1}{8\pi}\langle E^2+B^2 \rangle}$$

Necesito usar los campos totales en $z=0$:

$$\bar{E} = \bar{E}_i + \bar{E}_r = 0 \quad (\text{en } z=0)$$

$$\bar{B} = \bar{B}_i + \bar{B}_r = -2E_0\,\hat{x}\, e^{-i\omega t} \equiv \bar{\mathbb{B}}\, e^{-i\omega t}$$

$$\langle B^2 \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbb{B}\mathbb{B}^*) = \frac{1}{2}|\mathbb{B}|^2 = \frac{1}{2}(2E_0)^2 = 2E_0^2$$

Y finalmente, $\boxed{P = \frac{E_0^2}{4\pi}}$

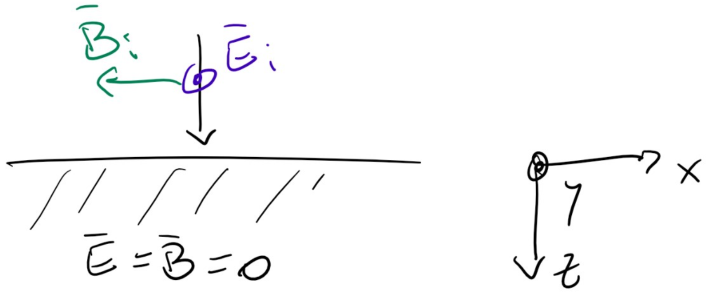
Ahora la densidad de energía:

$$u = \frac{1}{8\pi}(E^2+B^2) \rightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{16\pi}\left(|\mathbb{E}|^2 + |\mathbb{B}|^2\right)$$

$$= \frac{E_0^2}{4\pi} \checkmark$$

(es válido en todo el espacio)

b) Superficie totalmente absorbente: lo mismo pero no hay onda reflejada



$$\bar{E} = E_0 \hat{y}\, e^{i(kz-\omega t)} \qquad \bar{B} = -E_0 \hat{x}\, e^{i(kz-\omega t)}$$

La cuenta con el tensor de Maxwell es la misma: llegamos a

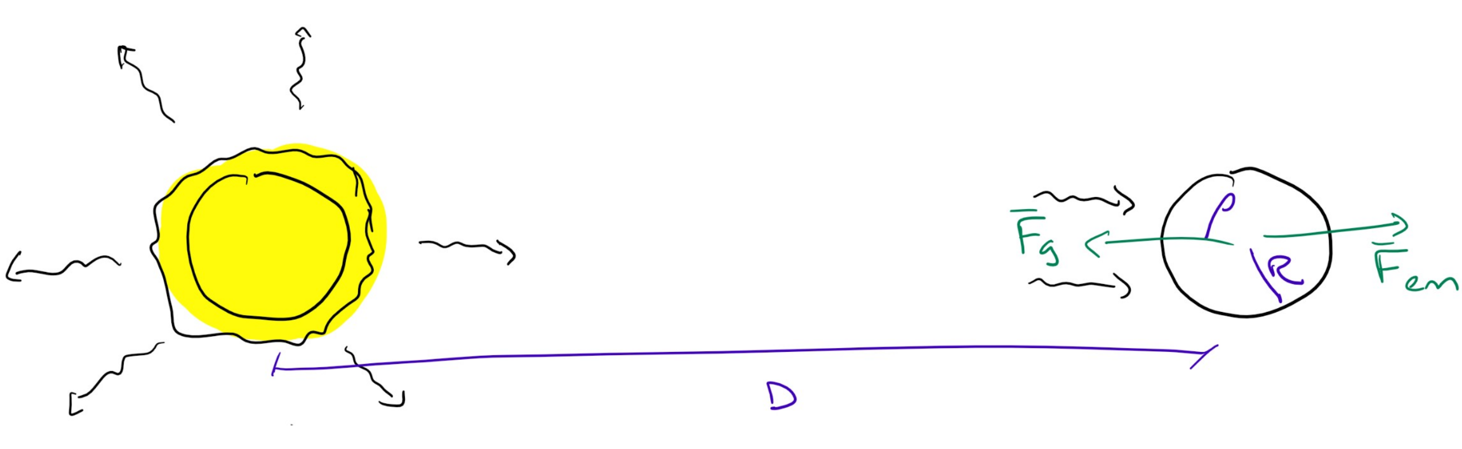
$$P = \frac{1}{8\pi}\langle E^2 + B^2 \rangle$$

$$\bar{E} = E_0 \hat{y} \qquad \bar{B} = -E_0 \hat{x} \qquad (\text{en } z=0)$$

$$\rightarrow \boxed{P = \frac{1}{8\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}|E|^2 + \frac{1}{2}|B|^2\right) = \frac{E_0^2}{8\pi}}$$

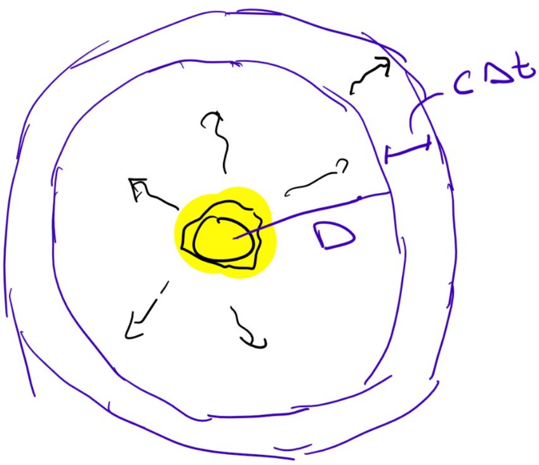
Y nuevamente $\langle u \rangle = \frac{1}{8\pi}\langle E^2 + B^2 \rangle$

c) ¿Qué radio debe tener una esfera hecha de un material con densidad 1 g cm^{-3}, que absorbe toda la luz que le llega, para que la presión de radiación de la luz solar compense la atracción gravitatoria del Sol? Aproximar la potencia de la radiación solar por $P = 4 \times 10^{26}$ W.



Necesito pasar de potencia a presión
→ uso que presión = densidad de energía

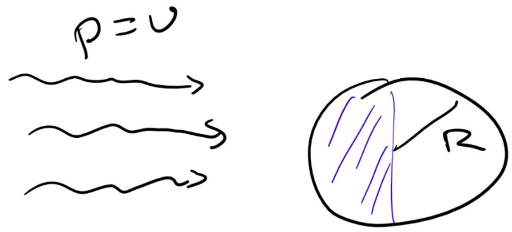
Miro el espacio que barre una "cáscara" de luz (frente de ondas) en un tiempo Δt:

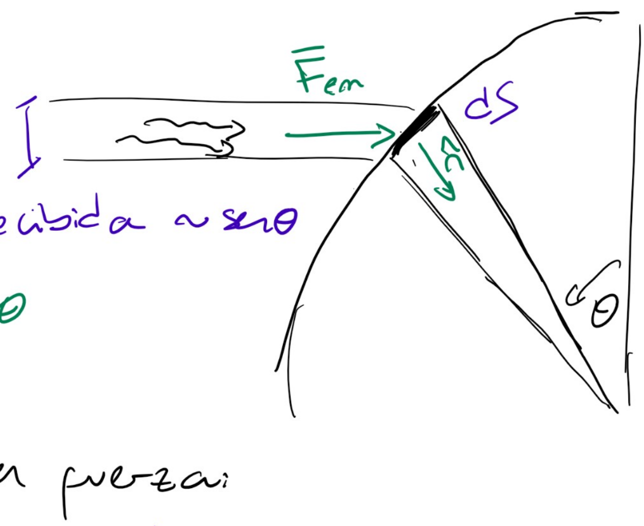


El cascarón contiene una energía $U = P\Delta t$ y tiene un volumen $V = 4\pi D^2 c\Delta t$

$$\rightarrow \boxed{u = \frac{U}{V} = \frac{P}{4\pi D^2 c}}$$

Vuelvo a mi esfera, y supongo que está muy lejos de manera que los rayos llegan paralelos:





Intensidad recibida $\sim \operatorname{sen}\theta$

$F_{em} \sim \operatorname{sen}\theta$

Integro para sacar la fuerza:

→ porque la luz pega sobre media esfera

$$F_{em} = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, R^2 \operatorname{sen}\theta \; p \, \operatorname{sen}^2\theta = \frac{4\pi}{3} R^2 p = \frac{PR^2}{3D^2 c}$$

Ver dibujo
(o hacer punto d))

Igualo a la fuerza gravitatoria:

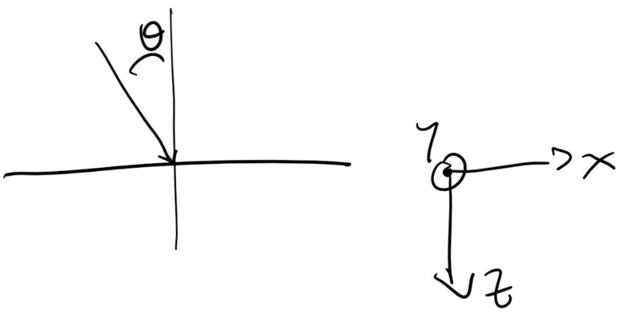
$$\frac{PR^2}{3\cancel{D^2}c} = \frac{GM}{\cancel{D^2}}\frac{4\pi}{3}R^3\rho \rightarrow \boxed{R = \frac{1}{12\pi}\frac{P}{GM\rho c}}$$

Esperamos que R sea chico o grande?

⋮

$\boxed{R \approx 3\times 10^{-7}\,m}$ → Es chico por la relación área/volumen

d) Hago la superficie absorbente con polarización lineal arbitraria



Terna: $\hat{u} = \operatorname{sen}\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{z}$

$\hat{e}_1 = \hat{y}$

$\hat{e}_2 = \hat{u}\times\hat{e}_1 = -\cos\theta\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{z}$

Onda incidente: $\bar{E}_i = E_0 \hat{e} e^{i\bar{k}\bar{r}}$

$\bar{B}_i = E_0 \hat{u}\times\hat{e}\, e^{i\bar{k}\bar{r}}$

con $\hat{e} = \cos\alpha\, \hat{e}_1 + \operatorname{sen}\alpha\, \hat{e}_2$

La presión viene de $T_{zz} = \frac{1}{4\pi}\left(B_z^2 - \frac{1}{2}(E^2+B^2)\right)$

(y también va a haber una fuerza en x viniendo de T_{xz})

En $z=0$: $\bar{E} = E_0 \hat{y}\, e^{ikx\operatorname{sen}\theta}$

$$\bar{B} = E_0(-\cos\theta\, \hat{x} + \operatorname{sen}\theta\, \hat{z})\, e^{ikx\operatorname{sen}\theta}$$

$$\langle B_z^2\rangle = \frac{1}{2}|B_z|^2 = \frac{1}{2} E_0^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\langle E^2\rangle = \frac{1}{2}|E|^2 = \frac{1}{2}E_0^2$$

$$\langle B^2\rangle = \frac{1}{2}|\bar{B}|^2 = \frac{1}{2}E_0^2$$

Juntando: $\boxed{p = -T_{zz} = \frac{E_0^2}{8\pi}\cos^2\theta}$

(sección 7.5 de Jackson)

7) Primero calculo la conductividad de un material donde los electrones son libres pero tienen amortiguamiento. Un electrón de masa m y carga $-e$ tiene una ec. de movimiento

$$m(\ddot{\bar{r}} + \gamma \dot{\bar{r}}) = -e\bar{E}$$

↳ cte. de amortiguamiento

Si $\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-i\omega t}$, tengo la solución

$$\bar{r}(t) = -\frac{e}{m}\bar{E}\frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega} = \frac{e}{m\omega}\frac{1}{\omega + i\gamma}\bar{E}$$

$$\dot{\bar{r}}(t) = -\frac{ie}{m}\frac{1}{\omega + i\gamma}\bar{E}$$

Y si hay densidad n de electrones, la densidad de corriente es

$$\bar{J} = -ne\dot{\bar{r}} = \underbrace{\frac{ine^2}{m(\omega+i\gamma)}}_{\sigma}\bar{E}$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma = i\frac{ne^2}{m(\omega+i\gamma)}}$$

Si todos los electrones son libres, entonces no hay átomos que vayan a formar dipolos y $\boxed{\varepsilon = 1}$.

Vemos que si $\omega \ll \gamma$, $\sigma = \sigma_0 = \frac{ne^2}{m\gamma} \Rightarrow$ es real

Con los datos del problema podemos despejar $\gamma = 4 \times 10^{13}\ s^{-1}$.

Como $\omega > 10^{17}$ Hz, estamos en el régimen $\omega \gg \gamma$

$\Rightarrow \sigma \simeq i \frac{ne^2}{m\omega} = i \frac{\Omega^2}{\omega}$ si defino $\Omega^2 = \frac{ne^2}{m} = (4{,}5 \times 10^{15}\ s^{-1})^2$

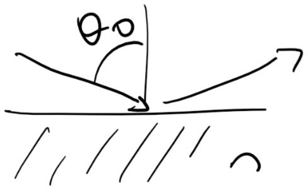
Para encontrar el ángulo de reflexión total hay que usar la ley de Snell, para lo que necesitamos el índice de refracción.

Sabemos que $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$

Reemplazando $\varepsilon = 1$ y $\sigma = i \frac{\Omega^2}{\omega}$, tenemos

$$n^2 = 1 - 4\pi \frac{\Omega^2}{\omega^2}$$

$\Rightarrow$ en la zona $\omega^2 > 4\pi\Omega^2$, tenemos $0 < n^2 < 1$



El ángulo de reflexión total cumple $\sin^2\theta_0 = n^2$.

Como $\omega \gg \Omega$, $n^2 \simeq 1$, y por lo tanto $\theta_0 \simeq \frac{\pi}{2}$:
ponemos $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \delta$

$\Rightarrow \sin^2\theta_0 \simeq 1 - \frac{\delta^2}{2} \Rightarrow \boxed{\delta = \sqrt{8\pi}\ \frac{\Omega}{\omega}}$