Física Teórica 1

Hoja 1
10/11/21

Transformación de las fuentes y de los campos.

Seguimos con Relatividad y E.M.

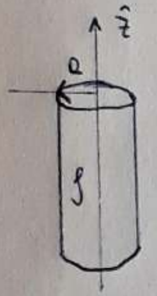
Vamos a hacer los problemas 9, 10 y 11 de la Guía 7.

9) Cilindro circular inf. Cargado unif. en volumen.

Calcular $\bar{E}$ y $\bar{B}$ en Sist. que se mueve paralelamente.

a) A partir de las dists. de carga y corriente.

b) Transformando los campos.



De F.3 sabemos que:

$\bar{B} = 0$ (En el sistema "quieto").

$$\bar{E} = \begin{cases} 2\pi . \rho . r . \hat{r} & \text{si } r \leq a \\ 2\pi . \rho . \frac{a^2}{r} . \hat{r} & \text{si } r > a \end{cases}$$

S

Queremos los campos en S' con $\bar{v} = v . \hat{z}$

a)

En S tenemos $J^\mu = (c . \rho, \bar{0}) \rightsquigarrow$ Cuadrivector contravariante.

En S' tenemos entonces: $J'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu . J^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c.\rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \rho \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma\beta c \rho \end{pmatrix}$

Tenemos que $\partial'_\mu . F'^{\mu\nu} = J'^\nu$. Usando el Lorenz's Gauge sale que

$\square . A'^\nu = J'^\nu$ y usando que nada depende de t ni $t' \Rightarrow \nabla^2 . A'^\nu = J'^\nu$.

De ahí encontramos A'^ν y usando que $\begin{cases} B'_k = \varepsilon_{ijk} . \partial_i . A_j \\ E'_k = -\partial_k . A_0 \end{cases}$

encontramos $\bar{B}'$ y $\bar{E}'$.

b) Transformando los campos directamente (más feliz)

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} E'_{\parallel} = E_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma\cdot(\bar{E}_{\perp} + \bar{\beta}\times\bar{B}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} E'_{\parallel} = 0 \\ \bar{E}'_{\perp} = \gamma\cdot\bar{E}_{\perp} \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{E}'(\bar{r}') = \begin{cases} 2\pi\rho r\hat{r} & \text{si } r\le a \\ 2\pi\gamma\rho\cdot\frac{a^2}{r}\cdot\hat{r} & \text{si } r>a \end{cases}$$

Pero necesitamos transformar también la posición.

r y $\hat{r} \rightsquigarrow r'$ y $\hat{r}'$

$z' = \gamma\cdot(z - v.t)$

$$\left.\begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \end{array}\right\} r' = r \text{ y } \phi' = \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E}'(\bar{r}') = \begin{cases} 2\pi.\rho.\gamma.r'.\hat{r}' & \text{si } r'\le a \\ 2\pi.\rho.\gamma.\frac{a^2}{r'}.\hat{r}' & \text{si } r'>a \end{cases}}$$

En S' se ve el campo de un cilindro uniforme con densidad $\gamma.\rho$.

Veamos qué pasa con $\bar{B}'$:

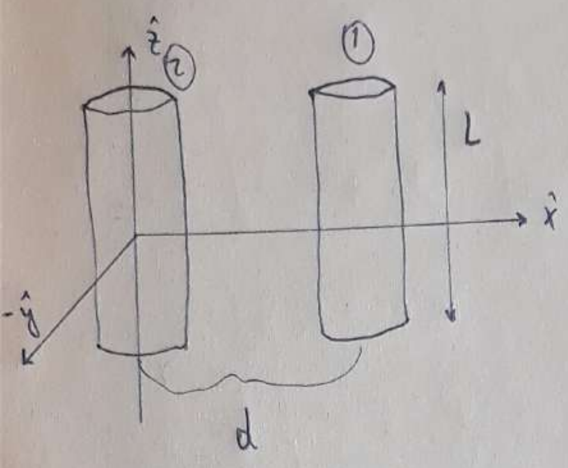
$$\left.\begin{array}{l} B'_{\parallel} = B_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma\cdot(\bar{B}_{\perp} - \bar{\beta}\times\bar{E}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B'_{\parallel} = 0 \\ \vec{B}'_{\perp} = -\gamma\cdot\bar{\beta}\times\bar{E} = -\gamma.\beta.E_r.\hat{\phi} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{B}'(\bar{r}') = \begin{cases} -\frac{2\pi}{c}\cdot(\gamma\beta c\rho).r'.\hat{\phi}' & \text{si } r'\le a \\ -\frac{2\pi}{c}\cdot(\gamma\beta c\rho)\cdot\frac{a^2}{r'}\cdot\hat{\phi}' & \text{si } r'>a \end{cases}}$$

En S' se ve el campo de un cilindro con corriente $-\gamma\beta c\rho$ uniforme.

Hoja 3

10) Dos barras como la anterior paralelas.
Demostrar que la fuerza por unidad de longitud es la misma en S y S'.



$\cdot)\ \bar{F}_{12} = \int_0^L \oint \rho_1 . \bar{E}_{12} . ds . dl \rightsquigarrow$ Fuerza que siente 1 debido a 2.

$\cdot)$ Asumimos $d \gg a \Rightarrow E_{12}$ es uniforme en la barra ($r \sim a$).

$$\bar{E}_2(\bar{r}) = \begin{cases} 2\pi . \rho_2 . r . \hat{r} & \text{si } r \leq a \\ 2\pi . \rho_2 . \frac{a^2}{r} . \hat{r} & \text{si } r > a \end{cases} \quad \text{En } S.$$

Para integrar más fácil asumimos que $\bar{E}_2(\bar{r}_1) = \frac{2\pi . \rho . a^2}{d} . \hat{x}$ $(d \gg a)$

$$\Rightarrow \bar{F}_{12} = \int \frac{2\pi}{d} . \rho . \rho . a^2 . dv . \hat{x} = \frac{2\pi}{d} . a^2 . \rho^2 . L . \pi . a^2 . \hat{x} \Rightarrow \frac{|\bar{F}_{12}|}{L} = 2 . \frac{(\pi . a^2 . \rho)^2}{d}$$

¿Qué pasa en S'? $\rightsquigarrow$ Tenemos $\bar{F}'_{12} = \bar{F}'_{\text{eléctrica}} + \bar{F}'_{\text{magnética}}$

$$\bar{F}'_{\text{eléctrica}} = \frac{2 . (\pi a^2 \rho \gamma)^2}{d}$$ (Lo mismo que antes pero con densidad $\gamma . \rho$)

$$\bar{F}'_{\text{magnética}} = \frac{1}{c} . \int_V \bar{j}'_1 \times \bar{B}'_2(\bar{r}'_1) \qquad \begin{cases} \bar{j}'_1 = - c . \beta . \gamma . \rho . \hat{z} \\ \bar{B}'_2(\bar{r}'_1) \approx - \frac{2\pi}{c} . (\gamma \beta c \rho) . \frac{a^2}{d} . \hat{y} \end{cases}$$ (exp. del prob. anterior)

$$\Rightarrow \bar{F}_{mag.} = - \frac{2}{d} . (\pi . a^2 . \gamma . \beta . \rho)^2 . L' . \hat{x} \Rightarrow |\bar{F}'_{12}| = \frac{2}{d} . (\pi . a^2 . \rho . \gamma)^2 . (1 - \beta^2) . L' . \hat{x}$$

$$\Rightarrow \frac{F'_{12}}{L'} = \frac{2}{d} . (\pi . a^2 . \rho)^2 \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{F_{12}}{L} = \frac{F'_{12}}{L'}}$$

Otra manera: Introducimos $f^\mu = \frac{1}{c} \cdot F^\mu{}_\nu \cdot J^\nu$ Generalización de F de Lorentz.

Es un cuadrivector contravariante.

$$f^\mu = \frac{1}{c} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c.\rho \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x.E_x + J_y.E_y + J_z.E_z \\ \rho.E_x + B_z.J_y - B_y.J_z \\ \rho.E_y - B_z.J_x + B_x.J_z \\ \rho.E_z + B_y.\cancel{J_x} - B_{\cancel{x}}.J_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f^\mu = \left(\frac{\bar{J}.\bar{E}}{c} ; \frac{\rho.\bar{E} + \bar{J} \times \bar{B}}{c} \right)$$

$\Rightarrow$ Usando este cuadrivector:

En S: $f^\mu = \left(0, \frac{2\pi^2.a^2.\rho^2}{d}, 0, 0\right)$

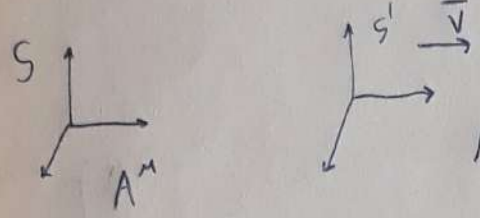
En S':

$$f'^\mu = L^\mu{}_\nu . f^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\pi^2.a^2.\rho^2}{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\pi^2.a^2.\rho^2}{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11) Dipolo magnético puntual $\bar{m}$ en reposo en S'.

$\phi' = 0$ y $\bar{A}' = \dfrac{\bar{m} \times \bar{r}'}{r'^3}$ S' tiene $\bar{V}$ respecto de S.

a) Potenciales a primer orden en β en S.



$$A'^\mu = (0, \bar{A}) = \left(0, \frac{\bar{m} \times \bar{r}'}{r'^3}\right)$$

Sabemos cómo transforma A^μ:

$$\left.\begin{aligned} \phi' &= \gamma \cdot (\phi - \bar{\beta} \cdot \bar{A}) \\ \bar{A}' &= \bar{A} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\bar{\beta} \cdot \bar{A}) \cdot \bar{\beta} - \gamma \cdot \phi \cdot \bar{\beta} \end{aligned}\right\}$$

Para transformar de S a S'!

$\underbrace{\bar{\beta} \to -\bar{\beta} \ \text{ y } \ X' \leftrightarrow X}_{\text{para la inversa}}$

$\Rightarrow$ Para transformar de S' a S:

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \gamma \cdot (\phi' + \bar{\beta} \cdot \bar{A}') \\ \bar{A} &= \bar{A}' + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \cdot (\bar{\beta} \cdot \bar{A}') \cdot \bar{\beta} + \gamma \cdot \phi' \cdot \bar{\beta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \phi &= \gamma \cdot \bar{\beta} \cdot \bar{A}' \\ \bar{A} &= \bar{A}' + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \cdot (\bar{\beta} \cdot \bar{A}') \cdot \beta \end{aligned}\right\} A^\mu = (\phi, \bar{A})$$

También debemos transformar la posición $\bar{r}$:

$$\bar{r} = \bar{r}' + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \cdot (\bar{\beta} \cdot \bar{r}') \bar{\beta} + \gamma \cdot c \cdot t' \cdot \bar{\beta} \ ; \quad c \cdot t = \gamma \cdot (c \cdot t' + \bar{\beta} \cdot \bar{r}')$$

A primer orden en β: $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \ldots \simeq 1$

Entonces, a primer orden en β:

$$\bar{r} \approx \bar{r}' + \bar{v}.t \Rightarrow \begin{cases} \phi = \bar{\beta} \cdot \dfrac{\bar{m} \times (\bar{r} - \bar{v}.t)}{|\bar{r} - \bar{v}.t|^2} \\ \bar{A} = \dfrac{\bar{m} \times (\bar{r} - \bar{v}.t)}{|\bar{r} - \bar{v}.t|^3} \end{cases}$$

Usando que el producto mixto es cíclico $\left(\bar{A}.(\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{C}.(\bar{A} \times \bar{B})\right)$

llegamos a que:

$$\begin{cases} \phi = \dfrac{(\bar{\beta} \times \bar{m}).\bar{R}}{R^3} \\ \bar{A} = \dfrac{\bar{m} \times \bar{R}}{R^3} \end{cases} \quad \text{con } \bar{R} = \bar{r} - \bar{v}.t$$

b) Calcular $\bar{E}$ y $\bar{B}$

Usamos el tensor de campo E.M. $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

$E_i = F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0$ con $i = 1, 2, 3.$

$B_i = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{ijk} . F^{jk}$

Para el campo eléctrico:

$$\partial^0 A^i = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{m} \times \bar{R}}{R^3}\right) = \ldots = -\frac{\bar{m} \times [3(\hat{r}.\bar{\beta}).\hat{r} - \bar{\beta}]}{R^3}$$

$$\partial^i A^0 = -\bar{\nabla}\phi = \ldots = \frac{3\hat{r}.(\bar{p}.\hat{r}) - \bar{p}}{R^3}$$

Con $\bar{p} = \bar{\beta} \times \bar{m}$ y $\hat{r} = \frac{\bar{R}}{R}$

Para el campo magnético: $\bar{A} = \dfrac{\bar{m} \times \bar{R}}{R^3}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \bar{B} &= \frac{3\hat{r}.(\hat{r}.\bar{m}) - \bar{m}}{R^3} \\ \bar{E} &= \frac{3\hat{r}(\hat{r}.\bar{p}) - \bar{p}}{R^3} - \frac{\bar{m} \times [3(\hat{r}.\bar{\beta}).\hat{r} - \bar{\beta}]}{R^3} \end{aligned}}$$