

Potenciales de Lienard-Wiechert para una carga puntual:

$$\bullet \varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{R(1 - \hat{m} \cdot \vec{\beta})} \Big|_{t_{ret}}$$

$$\bullet R = |\vec{r} - \vec{r}_s(t)| = |\vec{R}|$$

$$\bullet \hat{m} = \vec{R} / R$$

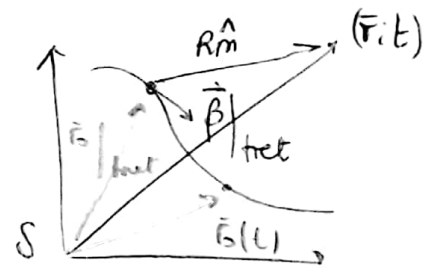
$$\bullet \vec{\beta} = \vec{v}(t) / c$$

$$\bullet \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{R(1 - \hat{m} \cdot \vec{\beta})} \vec{\beta} \Big|_{t_{ret}}$$

$$\bullet t_{ret} = t' / c(t - t') = R(t); \text{ dados } \vec{r} \text{ y } t$$

($t > t'$) con $\vec{r}_s(t')$ posición de la carga.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \hat{m} \times \vec{E} \quad (= \vec{\nabla} \times \vec{A}) \end{cases}$$



$$\bullet \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q(\hat{m} - \vec{\beta})}{\gamma^2 R^2 (1 - \hat{m} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_{ret}} +$$

$$\frac{q}{c} \frac{\hat{m} \times [(\hat{m} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{m})^3 R} \Big|_{t_{ret}}$$

campo de
aceleración/
radiación

①: campo de velocidades : como el estático $\sim 1/R^2 \Rightarrow$

no produce flujo de energía al ∞ .

por unidad de área.

\Rightarrow Flujo de Energía instantáneo: vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_r \times \vec{B}_r) = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_r \times (\hat{m} \times \vec{E}_r) = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_r|^2 \hat{m}$$

$(\vec{S} \cdot \hat{m})$: Energía por unidad de área por unidad de tiempo, detectada en el punto de observación \vec{r} a un tiempo t , de radiación emitida por la carga q en un tiempo $t' = t - \frac{R(t)}{c}$

Energía emitida:

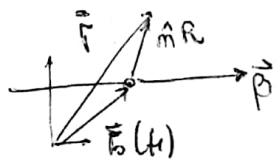
En un intervalo entre $t' = t_1$; $t' = t_2$:

$$U = \int_{t=t_1+R(t)/c}^{t=t_2+R(t_2)/c} (\vec{S} \cdot \hat{m}) \Big|_{t_{ret}} dt \quad ; \quad \text{cambio } t \rightarrow t(t') \\ dt \rightarrow \frac{dt}{dt'} dt'$$

$$= \int_{t'=t_1}^{t'=t_2} (\vec{S} \cdot \hat{m}) \frac{dt}{dt'} dt'$$

Es la cantidad que nos interesa $\left\{ \begin{array}{l} \text{Potencia irradiada, por unidad de área} \\ \text{(instantánea) en términos del} \\ \text{tiempo de emisión de la carga.} \end{array} \right.$

$$\therefore dP(t) = \left(\vec{S} \frac{dt}{dt'} \right) d\vec{A} \quad ; \quad \text{con } d\vec{A} = R^2 d\Omega \hat{m}$$



$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega}(t) \equiv \frac{(dE/dt')}{d\Omega} = R^2 \cdot \vec{S} \cdot \hat{m} \cdot (1 - \hat{m} \cdot \vec{\beta}) \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Distribución} \\ \text{angular de la} \\ \text{potencia irra-} \\ \text{diada.} \end{array} \right.$$

C.A.:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_0(t)| = c(t - t') \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial t} = c \left(1 - \frac{dt'}{dt} \right) = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} =$$

$$= - \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t)|} \left(+ \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t'} \right) \frac{dt'}{\partial t} = - \hat{m} \vec{v} \cdot \frac{dt'}{\partial t} \Rightarrow \frac{dt'}{\partial t} \left(1 - \frac{\hat{m} \vec{v}}{c} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{dt}{dt'} = (1 - \hat{m} \cdot \vec{\beta}) \right|$$

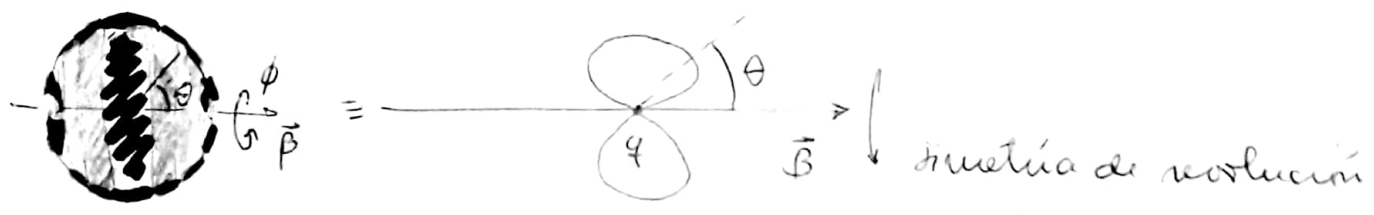
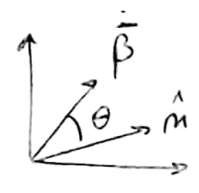
$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{[\hat{m} \times (\hat{m} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]^2}{(1 - \hat{m} \cdot \vec{\beta})^5}$$

Si $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}} \Rightarrow$

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{[\hat{m} \times (\hat{m} \times \dot{\vec{\beta}})]^2}{(1 - \hat{m} \cdot \vec{\beta})^5}$$

Si $|\vec{\beta}| \approx 0$: caso no relativista $\Rightarrow (1 - \hat{m} \cdot \vec{\beta} \approx 1)$

$$\frac{dP}{d\Omega} \Big|_t = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\dot{\vec{r}}|^2 \sin^2 \theta$$



$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega \propto \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \int_0^\pi (1-x^2) dx = \frac{8\pi}{3}$$

(cos = x, seno de dx)

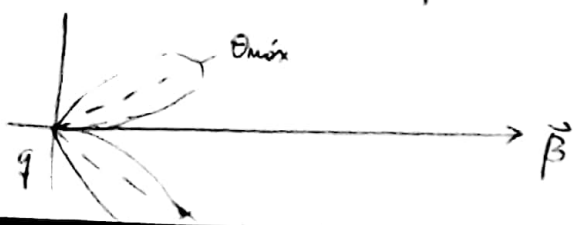
$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} |\dot{\vec{r}}|^2$$

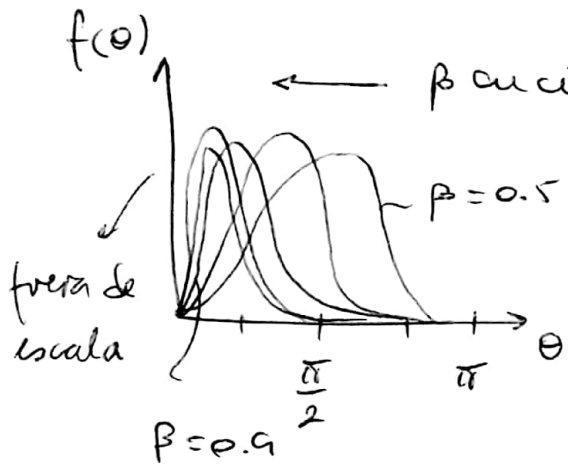
F3rmula de Larmor
(gal. para $|\vec{\beta}| \ll 1$)

Si no : caso relativista : $\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\dot{\vec{\beta}}|^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{4\pi c^3} f(\theta)$

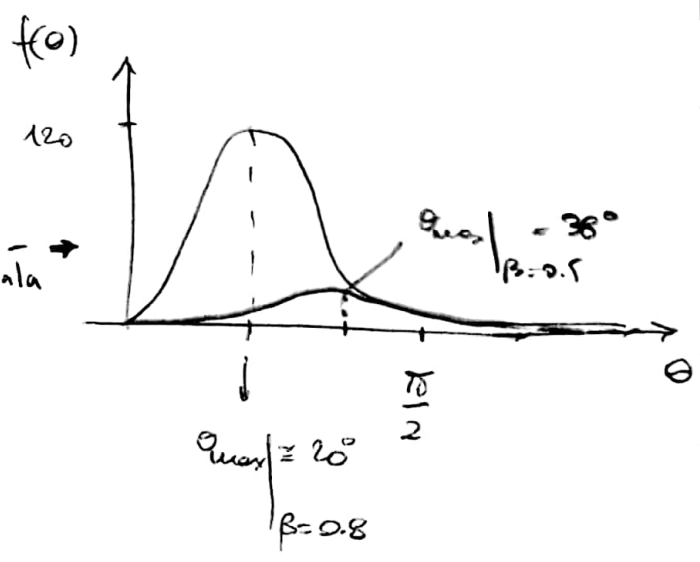
Cambio $\cos \theta = x \Rightarrow f(x) = \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5}$

$\Rightarrow \theta_{m3x} = \cos^{-1} \left[\frac{1}{3\beta} (\sqrt{1+45\beta^2} - 1) \right] \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \cos^{-1}(1) = 0$





con magnitudes de $f(\theta)$ a escala

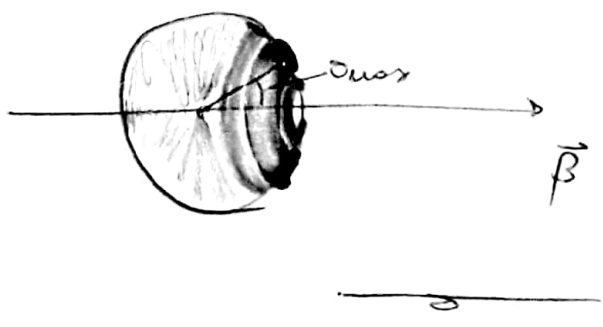
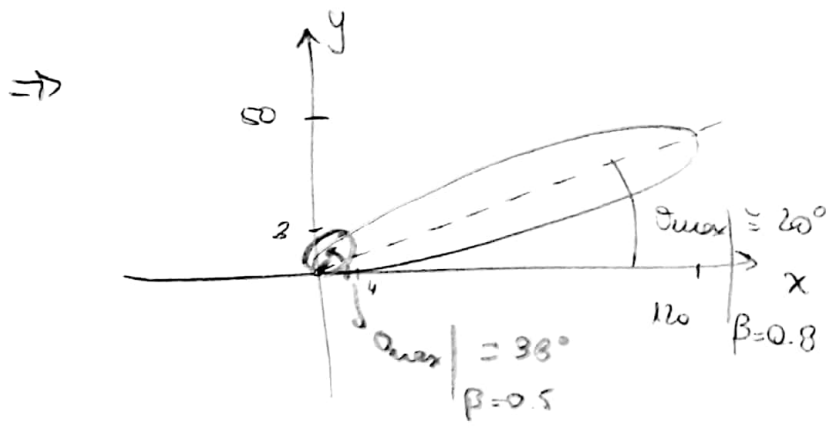


Si grafico en coordenadas polares:

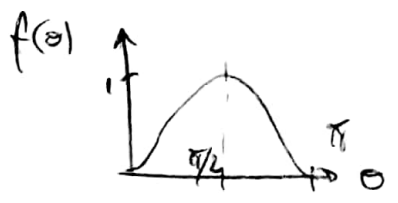
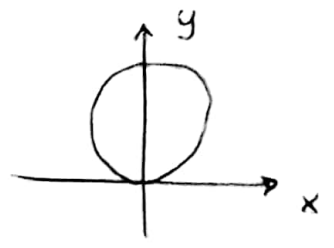
$$f(\theta) = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

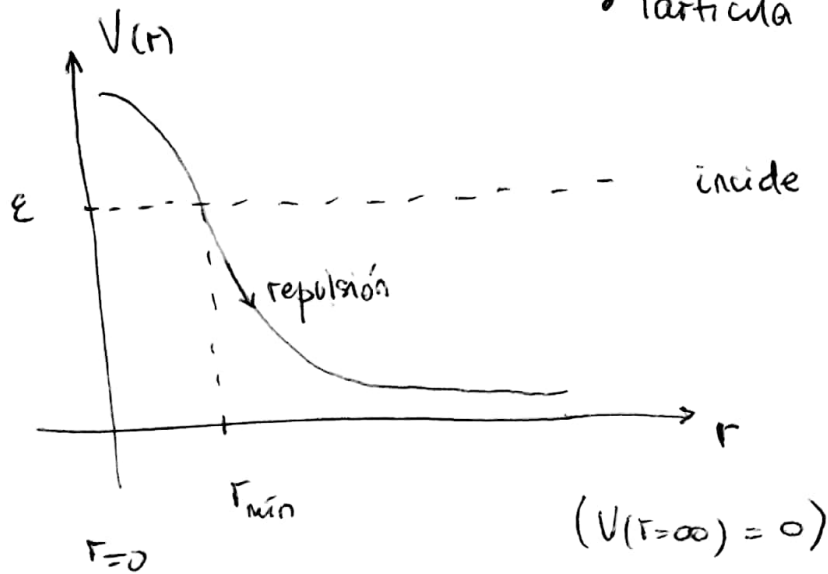


$$f(\theta) = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sin^2 \theta = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$



Guía 8: Radiación

P.1)



• Partícula de masa m
 carga $q = Z \cdot e$
 incide con $E = \frac{1}{2} m v_0^2$
 energía cinética inicial desde infinito

Potencial repulsivo en el origen, Partícula No-Relativista ($\frac{v_0}{c} \approx 0$)

a) Hallar energía radiada por la partícula.

Usa potencia instantánea emitida (no-relativista):

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \ddot{r}^2 \quad ; \quad \text{Larmor (no-relativista)}$$

\Rightarrow

Energía total radiada:

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot P(t) \quad ; \quad \text{"ida y vuelta"}$$

$$= \int_{\text{ida}} dt \cdot P(t) + \int_{\text{vuelta}} dt \cdot P(t)$$

(aprox.) \rightarrow

$$= 2 \int_{\text{ida}} dt \cdot P(t)$$

$$= 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{|v|} \cdot P(r)$$

Necesito $\dot{r}(t)$ y $\ddot{r}(t)$

$$\ddot{r} = -\frac{1}{m} \cdot V'(r) : \text{aceleración}$$

Para la velocidad \dot{r} uso conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r) = \mathcal{E} \quad \text{aprox.:}$$

(desprecio las pérdidas)

$$\Rightarrow |\dot{r}| = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\mathcal{E} - V(r)} \quad ; \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

(energía inicial)

$$\Delta W = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{M}{2}} \cdot \frac{q^2}{c^3} \cdot \frac{1}{M^2} \int_{r_{\min}}^{\infty} dr \cdot \frac{[V'(r)]^2}{\sqrt{V(r_{\min}) - V(r)}} \quad ; \quad (q = Ze)$$

donde $V(r_{\min}) = \mathcal{E} = \frac{1}{2} m v_0^2$

dist. mín. acercamiento al origen.

b) Interacción Coulombiana: $V(r) = Z Z' e^2 / r$

$$\Rightarrow \Delta W = \frac{8}{45} \cdot \frac{Z \cdot M \cdot v_0^5}{Z' \cdot c^3} \quad ; \quad v_0 : \text{velocidad incidente en infinito}$$

calculo de la integral

$$= \frac{16}{45} \cdot \left(\frac{Z}{Z'}\right) \cdot \left(\frac{v_0}{c}\right)^3 \cdot \mathcal{E}$$

fracción de energía radiada

Si $v_0 \ll c$ (caso no-relativista) vemos que $\Delta W \ll \mathcal{E}$.

c) Considerar positrón incidiendo sobre un protón
 $(Z=Z')$ m, v_0 $M \approx 2000 m \gg m$

o) Despreciando movimiento del protón, estimar velocidad final del positrón: v_f

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = E - \Delta W \quad ; \quad E = \frac{1}{2} M v_0^2, \quad \Delta W = \frac{16}{45} \left(\frac{v_0}{c} \right)^3 E$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_f &= \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - \Delta W} \\ &= \sqrt{2/M} \sqrt{E} (1-x)^{1/2} \quad ; \quad x = \frac{\Delta W}{E} \\ &= v_0 \left(1 - \frac{\Delta W}{2E} \right) \quad \text{pérdida de energía} \end{aligned}$$

variación relativa: $\frac{v_0 - v_f}{v_0} \approx \frac{\Delta W}{2E} = \frac{8}{45} \left(\frac{v_0}{c} \right)^3$

o.o) Despreciando radiación, considerando masa finita del protón, estimar vel. final del positrón (v_f)

Conservación, Energía: $\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} M v^2$ protón
vel. (final)

impulso: $m \cdot v_0 = -m \cdot v_f + M \cdot v$

$$\Rightarrow v_f = \frac{M-m}{M+m} v_0 \approx v_0 \left(1 - \frac{2M}{M} \right)$$

Efecto de

variación relativa: $\frac{v_0 - v_f}{v_0} \approx \frac{2M}{M} \approx 10^{-3} \quad \therefore$ la masa finita

domina sobre pérdidas por radiación para $v_0 \lesssim (0,18) \cdot c \approx c/5$

P2) versión Relativista del problema 1:

Partícula (m) con: $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$; $\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{v}_0}{c}$
(y carga q)



a) Demostrar que para una partícula de masa m y carga q:

$$m \cdot \gamma \cdot \dot{\vec{v}} = q \left[\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} - (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \vec{\beta} \right]$$

donde $\gamma = \gamma(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{1-(\vec{v}/c)^2}}$; $\dot{\vec{v}} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}$

\vec{E} y \vec{B} campos eléctrico y magnético externos

Usamos : $\frac{d}{dt} p^\mu = K^\mu$; 4-fuerza sobre una partícula

$$p^\mu = m \cdot u^\mu ; \quad u^\mu = \gamma (c; \vec{v})$$

$$K^\mu = \gamma \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}; \vec{F} \right) ; \quad \vec{F} : \text{fuerzas externas (en el sistema inercial)}$$

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) ; \quad \text{Si se aplican campos } \vec{E} \text{ y } \vec{B} \text{ sobre la partícula}$$

Componente $\mu=0$:

$$(p^\mu \equiv (p^0; \vec{p}))$$

$$\frac{d}{dt} p^0 = K^0$$

$$\frac{dt}{dt} \cdot \frac{d}{dt} (m\gamma c) = \gamma \cdot \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{m c \dot{\gamma} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}} ; \quad (1)$$

Componentes $\mu=i (= 1, 2, 3)$:

$$(\vec{p} \equiv m\gamma \vec{v})$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \gamma \cdot \vec{F}$$

$$\gamma = \cancel{\left(\frac{dt}{dt} \right)} \cdot \dot{\vec{p}} = \gamma \cdot \vec{F}$$

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \Rightarrow m \dot{\gamma} \vec{v} + m \gamma \dot{\vec{v}} = \vec{F}$$

$$\therefore m \gamma \dot{\vec{v}} = \vec{F} - \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{c}$$

uso \uparrow (1)

$$\Rightarrow a) \quad m \gamma \dot{\vec{v}} = q \left[\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} \right] - (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \vec{\beta}$$

Para nuestro problema: $(\vec{v} = \dot{\vec{x}} \cdot \hat{x})$

$$\begin{cases} \vec{B} = 0 \\ \vec{E} = \frac{Q}{r^2} \hat{r} \end{cases} \longrightarrow \vec{E} = \frac{Q}{x^2} \hat{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{m \cdot \gamma \cdot \dot{v}} = q \left[E - \beta^2 E \right] = \boxed{\frac{q E}{\gamma^2}} \quad (2)$$

Volvemos a lo que nos interesa.

Queremos la energía radiada por la partícula (M, 7)

relativista:

$$\Delta W = 2 \int_0^{\infty} dt \cdot P(t)$$

↓
0 - retorno

(viaje de ida y vuelta)

donde $P(t) = \int \overbrace{\frac{dP}{d\Omega}}^{\text{relativista}} d\Omega$; $d\Omega = dp \cdot d(\cos\theta)$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 dx \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5}$$

(caso $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$)

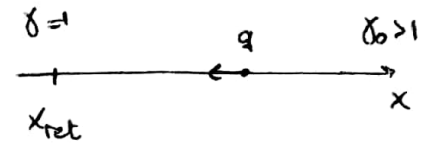
$$= \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \dot{v}^2 \gamma^6$$

Larmor relativista
(caso $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$)

[obs.: Para un caso gral. $P(\beta) = \frac{2q^2 \gamma^6}{3c} [\dot{\beta}^2 - (\dot{\beta} \times \dot{\beta})^2]$ (Larmor Relativista)]

$\Rightarrow \Delta W = 2 \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{|\dot{\gamma}|} \cdot P(\gamma)$

γ_0 : valor inicial



(Obs.: ΔW ida y vuelta es una estimación bajo hipótesis $\gamma_f \approx \gamma_0$)

Necesito: $\left[\ddot{\gamma} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{mc^2} = \frac{qE}{mc} \beta \right]$ en función de γ

(1)

$\bullet \beta(\gamma) = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$

Busco: $E = Q/x^2 = E(\gamma)$

ca: uso (2): $\left[\ddot{v} = \frac{qE}{m\gamma^3} \right]$

$\Rightarrow \left(\frac{m}{q} \right) \gamma^3 \frac{dv}{dt} dx = \frac{Q}{x^2} dx$

$\frac{m}{q} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \gamma^3 \cdot v \cdot d\gamma = Q \int_{\infty}^x \frac{dx}{x^2} = -\frac{Q}{x}$

$c^2 (\gamma - \gamma_0)$

$\Rightarrow \boxed{qE(\gamma) = q \frac{Q}{x^2} = \frac{m^2}{qQ} \cdot c^4 (\gamma_0 - \gamma)^2}$

$\Rightarrow \left[\ddot{v}(\gamma) = \frac{qE(\gamma)}{m\gamma^3} \right]$

$$\therefore \Delta W = 2 \int_1^{\gamma_0} d\gamma \frac{mc}{qE|\beta|} \left[\frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \gamma^6 \left(\frac{qE}{m\gamma^3} \right)^2 \right]$$

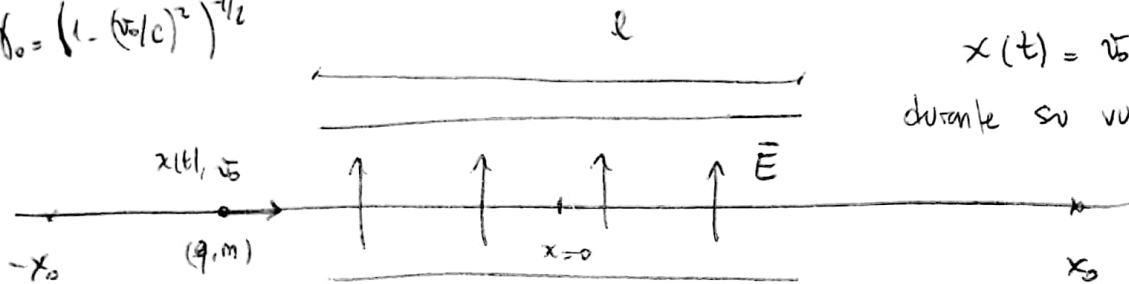
$$\Delta W = \frac{4}{3} \left(\frac{q}{Q} \right) mc^2 \int_1^{\gamma_0} d\gamma \frac{\gamma (\gamma_0 - \gamma)^2}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

$$\left(\Delta W_{ida} = \frac{\Delta W}{2} \right)$$

P4) [Algunas ideas, para que lo terminen ustedes]

La partícula
A $t=0$ entra al capacitor
con trayectoria aproximada:

$$\gamma_0 = (1 - (v_0/c)^2)^{-1/2}$$



$$x(t) = v_0 t - \frac{l}{2}$$

durante su vuelo.

$\vec{v} = v_0 \hat{x} + \delta \vec{v}$; $\delta \vec{v}$: desviación por campo E en las placas : $\delta v \ll v_0$: despreciable

a) $\Delta W = \int dt \cdot P(t) \approx P_0 \Delta t_0$; $\Delta t_0 = l/v_0$

usar $P(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \frac{\dot{\gamma}^6}{\gamma^6} \left[\beta^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right] \approx \frac{2}{3} \frac{q^4 \gamma_0^4}{m^2 c^3} E^2 \equiv P_0$

Larmor Relativista

(orden cero)

uso P4) a): $\vec{v} \approx \frac{qE}{m\gamma_0}$ (~~...~~)
($\vec{E} \cdot \vec{v} = 0$)

b) $\vec{E}_{rad} \Big|_{(r,t)} = \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{n} \times \{ (\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \}}{R (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right] \Big|_{t_{ret.}}$

↳ tiempo de la medición

↳ tiempo de la emisión

$$\begin{cases} \vec{r} = x_0 \hat{x} & ; \quad \hat{n} = \hat{x} \\ 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta} \equiv 1 - \beta_0 \end{cases}$$

⋮

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{rad}}(x_0, t) = - \frac{q^2 E}{m c^2 (1 - \beta_0)} \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0}} \cdot \hat{y} \cdot \frac{1}{R_{\text{ret}}}$$

posición de emisión en tiempo

$$\bullet R_{\text{ret}}(x_0) \equiv R|_{t_{\text{ret}}} = \underbrace{x_0}_{\text{posición de la medición}} - \underbrace{x(t')}_{\text{retardado } t'} \quad (29)$$

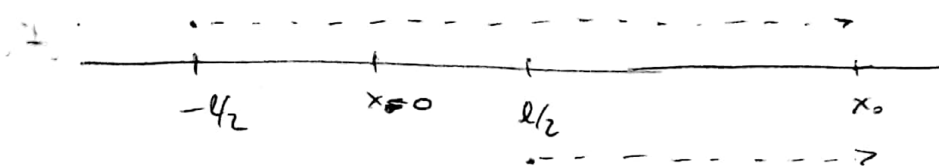
$$= x_0 - x(t') = c(t - t') \Rightarrow \text{despejo } t' = t'(x_0, t)$$

$$x(t') = v_0 t' - \frac{l}{2} \quad ; \quad \text{posición de la partícula que emite.}$$

$$\Rightarrow R_{\text{ret}}(x_0) = \frac{x_0 - v_0 t + l/2}{1 - \beta_0}$$

$$\therefore \vec{E}_{\text{rad}}(x_0, t) = - \frac{q^2 E}{m c^2} \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0}} \frac{\hat{y}}{x_0 - v_0 t + l/2} \quad ; \quad \text{durante el paso de la partícula por el capacitor : } \otimes$$

durante el paso de la partícula por el capacitor : \otimes



$$\otimes : t_1^* = \frac{x_0 + l/2}{c} < t < \frac{x_0 - l/2}{c} + \frac{l}{v_0} = t_2^* \Rightarrow \Delta t^* = t_2^* - t_1^* = \frac{l}{v_0} (1 - \beta_0)$$

Les queda el cálculo de $\vec{E}_{\text{rad}}(-x_0, t)$ y la comparación