FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2021

PRÁCTICA DEL 24/11:
GUÍA 8 - RADIACIÓN DE FUENTES LOCALIZADAS

Partimos de la expresión para el potencial vector

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' dt' \; \delta \left[t' - \left(t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|}{c} \right) \right] \; \frac{\mathbf{J}(\boldsymbol{r'}, t')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} \tag{1}$$

producido por una fuente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, para desarrollar los campos debido a fuentes que admiten una descomposición armónica $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{j}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ y que están localizadas en una región del espacio de tamaño característico d, y poder estudiar la radiación de campo lejano. Esto es el régimen tal que

$$d \ll \lambda \ll r$$

con $\lambda = 2\pi c/\omega$ la longitud de onda asociada a los campos y r la distancia típica entre el punto campo de observación y el punto donde se encuentran localizadas las fuentes. Entonces se puede escribir

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{cr} \int d^3r' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'}) \, e^{-ik\hat{n}\boldsymbol{r'}} \,, \qquad \hat{n} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}| \tag{2}$$

y tomar un desarrollo multipolar a partir de la la expansión en serie de la exponencial del integrando.

En la teórica obtuvieron los campos de radiación a partir de la expresión anterior:

$$\boldsymbol{B}_{rad}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{B}^{(M)}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{B}^{(E)}(\boldsymbol{r}, t) + \mathcal{O}[(1/\lambda)^4] \tag{3}$$

$$\boldsymbol{E}_{rad}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{E}^{(M)}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{E}^{(E)}(\boldsymbol{r}, t) + \mathcal{O}[(1/\lambda)^4] \tag{4}$$

Donde los primeros términos en (3) y (4), que corresponden al orden cero en el desarrollo de (2), son los denominados de radiación dipolar eléctrica y tienen campos $\sim \mathcal{O}[(1/\lambda)^2]$. Los términos de orden uno en el desarrollo de (2), corresponden al dipolar magnético (M) y cuadrupolar eléctrico (E), y son campos $\sim \mathcal{O}[(1/\lambda)^3]$; mas precisamente son -típicamente- un orden superior en d/λ, respecto al orden cero. En esta formulación, los términos del desarrollo son

- Campo magnético a orden dipolar eléctrico:

$$\boldsymbol{B}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t) = k^2 (\hat{n} \times \boldsymbol{p}) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \tag{5}$$

- Campo eléctrico a orden dipolar eléctrico:

$$\boldsymbol{E}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t) = k^2 (\hat{n} \times \boldsymbol{p}) \times \hat{n} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \tag{6}$$

- Campo magnético a orden dipolar magnético:

$$\boldsymbol{B}^{(M)}(\boldsymbol{r}, t) = k^2 (\hat{n} \times \boldsymbol{m}) \times \hat{n} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \tag{7}$$

- Campo eléctrico a orden dipolar magnético:

$$\boldsymbol{E}^{(M)}(\boldsymbol{r},t) = -k^2(\hat{n}\times\boldsymbol{m})\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{8}$$

- Campo magnético a orden cuadrupolar eléctrico:

$$\boldsymbol{B}^{(E)}(\boldsymbol{r},t) = -i\frac{k^3}{6}\hat{n}\times(\bar{\bar{Q}}\cdot\hat{n})\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{9}$$

- Campo eléctrico a orden cuadrupolar eléctrico:

$$\boldsymbol{E}^{(E)}(\boldsymbol{r},t) = -i\frac{k^3}{6}[\hat{n}\times(\bar{\bar{Q}}\cdot\hat{n})]\times\hat{n}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{10}$$

Orden a orden vale que

$$\boldsymbol{E}^{(i)}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}^{(i)}(\boldsymbol{r},t)\times\hat{n} \tag{11}$$

donde

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\ \mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \hat{r}$$

será el versor que indica la dirección desde el origen del sistema de coordenadas (en donde centramos las fuentes localizadas) hacia la dirección de observación (punto campo).

A partir de la descomposición armónica de esta formulación tenemos que

$$\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{m} \equiv \boldsymbol{m}(\boldsymbol{r})$$

$$\bar{\bar{Q}} \equiv \bar{\bar{Q}}(\mathbf{r})$$

Es decir, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{m}$, y $\bar{\bar{Q}}$ son el momento dipolar eléctrico, el momento dipolar magnético, y el momento cuadrupolar eléctrico, independientes del tiempo. Mas precisamente, la definición entre cada momento independiente del tiempo y el dependiente del tiempo está dada, en general por:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}.$$

donde $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t)$ es la expresión compleja del momento $\mathbb{R}e[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t)]$. Las expresiones de los campos (5)-(10) son complejas, por lo que para hallar los campos físicos hay que tomar su parte real.

Tenemos una formulación equivalente para los campos de radiación en la aproximación de campo lejano, donde en lugar de definir los momentos estacionarios (independientes del tiempo), usamos expresiones de los campos de radiación a partir de derivadas temporales de los momentos originales (dependientes del tiempo), esto es:

$$\boldsymbol{B}_{rad} = -\frac{1}{c^2 r}[\hat{r}\times\ddot{\mathbf{p}} + (\hat{r}\times\ddot{\mathbf{m}})\times\hat{r} + \frac{1}{6c}\hat{r}\times\dddot{\mathbf{Q}}]|_{t_{ret}} + \mathcal{O}[(1/\lambda)^4] \tag{12}$$

$$\boldsymbol{E}_{rad} = \frac{\hat{r}}{c^2 r}\times[\hat{r}\times\ddot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{m}} + \frac{1}{6c}\hat{r}\times\dddot{\mathbf{Q}}]|_{t_{ret}} + \mathcal{O}[(1/\lambda)^4] \tag{13}$$

en donde se consideró campo lejano al aproximar $1/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}| = 1/r$ y $\hat{n} = \hat{r}$, y se definió $\mathbf{Q} = \bar{\bar{Q}}\hat{r}$. **Aquí arriba los momentos dependen del tiempo** y los puntos indican derivadas temporales. Finalmente, observen que las expresiones de los campos de radiación deben ser evaluadas en el tiempo retardado de emisión: $t_{ret} = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \simeq t - r/c$. Pueden chequear, a partir de escribir cada momento dependiente del tiempo como $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ que se obtienen expresiones equivalentes, término a término, a las de las ecuaciones (5)-(10) enunciadas en la primer formulación (como las que obtuvieron en la teórica). Las expresiones (12) y (13) suelen ser mucho mas prácticas para calcular los campos de radiación. Observen que si escriben los momentos reales no es necesario tomar parte real al final del cálculo.

Recordar que para calcular los momentos en el caso en que se tienen cargas puntuales hay que discretizar las integrales en volumen sobre las fuentes de la siguiente manera:

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{r}, t) = \int d^3r' \rho(\boldsymbol{r'}, t)\boldsymbol{r'}(t) \;\; \rightarrow \;\; \mathbf{p}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha(t) \tag{14}$$

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2c}\int d^3r' \boldsymbol{r'}(t) \times \mathbf{J}(\boldsymbol{r'}, t) \;\; \rightarrow \;\; \mathbf{m}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2c}\sum_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha(t) \times q_\alpha \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha(t) \tag{15}$$

$$Q_{i,j} = \int d^3r' (3r'_i(t)r'_j(t) - \delta_{ij}|\boldsymbol{r'}|^2)\rho(\boldsymbol{r'}, t) \;\; \rightarrow \;\; Q_{i,j} = \sum_\alpha q_\alpha \left(3\, r_{\alpha i}(t) r_{\alpha j}(t) - \delta_{ij}|r_\alpha|^2\right) \tag{16}$$

donde α suma sobre todas las cargas puntuales del sistema, y los índices $\{i, j\} = \{1, 2, 3\}$ representan las componentes cartesianas del vector posición $\mathbf{r}$ ($r_1 = x, r_2 = y, r_3 = z$), de manera que se tiene escrito el momento cuadrupolar como una matriz de 3×3 según sus componentes cartesianas.

Por último recordamos las expresiones de la potencia irradiada por unidad de ángulo solido

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, r^2 \tag{17}$$

donde $\boldsymbol{S}$ es el vector de Poynting. Utilizando los campos de radiación reales, el vector de Poyting en vació es

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}_{rad} \times \boldsymbol{B}_{rad}) = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}_{rad} \times (\hat{n} \times \boldsymbol{B}_{rad})) = \frac{c}{4\pi}\hat{n}|\boldsymbol{E}_{rad}|^2 \tag{18}$$

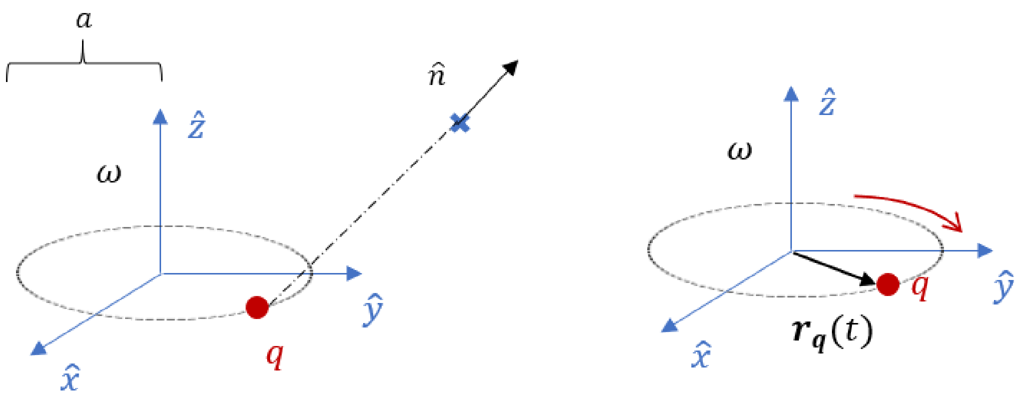
El promedio temporal de la potencia se calcula integrando sobre un periodo de oscilación del campo eléctrico $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, con ω la frecuencia angular de los campos de radiación. Por ejemplo, el promedio temporal de la potencia de los campos de radiación por unidad de ángulo solido es

$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \frac{dP}{d\Omega}(t) \tag{19}$$

Problema 5.

- Calcular los campos de radiación E y B hasta orden dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.
- Graficar cualitativamente E y B sobre la superficie de una esfera.
- Calcular la potencia por unidad de ángulo sólido y graficar su promedio temporal en función de la dirección.
- Calcular la potencia total emitida en todas las direcciones y su promedio temporal.
- Indicar la frecuencia angular de la radiación emitida.

Ítem a: Una carga q que gira en una órbita circular de radio a y frecuencia angular ω.



Esquema del problema 5 ítem (a). $\hat{n}$ es la dirección que va desde el punto fuente $\mathbf{r}_{\,q}$ al punto campo $\mathbf{r}$, es decir, desde la carga hasta el punto donde se quiere ver los campos de radiación. Cómo $a \ll r$, entonces usamos $\hat{n} \simeq \hat{r}$.

- Calcular los campos de radiación E y B hasta orden dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.

En principio vamos a calcular los momentos multipolares en ambas formulaciones. El $\mathbf{p}$ dependiente del tiempo es

$$\mathrm{p}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\alpha} q_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha(t) \quad \rightarrow \quad \mathrm{p}(\boldsymbol{r},t) = q\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{q}}(t) = qa(cos\omega t\,\hat{x} + sin\omega t\,\hat{y}) \tag{20}$$

Para escribir el momento dipolar factorizando toda la dependencia del tiempo armónicamente con $e^{-i\omega t}$, escribimos

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{q}}(t) = a(cos\omega t\hat{x} + sin\omega t\hat{y}) = Re\{a(\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\omega t}\} \tag{21}$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{p}(\boldsymbol{r},t) = Re\{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}\} \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) = q\,a(\hat{x} + i\hat{y}) \tag{22}$$

Para hallar el momento dipolar magnético usamos:

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2c}\sum_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha(t)\times q_\alpha \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha(t) \quad\rightarrow\quad \mathbf{m}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2c}\boldsymbol{r_q}(t)\times q\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{q}}(t) \tag{23}$$

Derivando respecto del tiempo la ecuación (21) a ambos lados de las igualdades se tiene que

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{q}}(t)=a\omega(-sen\omega t\hat{x}+cos\omega t\hat{y}) \tag{24}$$

De (23) tenemos que el momento dipolar magnético es

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{r},t)=\frac{q\omega a^2}{2c}[cos^2(\omega t)\hat{z}+sen^2(\omega t)\hat{z}]=\frac{q\omega a^2}{2c}\hat{z} \tag{25}$$

que es estático en este caso. El término dipolar magnético del campo de radiación es generado por el movimiento acelerado del $\mathbf{m}$ de las fuentes y en este caso será nulo pues el momento magnético está fijo en el tiempo.

Otra forma de ver esto último es intentando escribir $\mathbf{m}(\boldsymbol{r},t)=\mathbb{R}e[\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r})\,e^{-i\omega t}]$, o directamente ver que no queda otra que usar una frecuencia nula para describir el movimiento, por lo que los campos que van como potencias de $k=\omega/c$ serán nulos.

Finalmente, nos queda por ver el momento cuadrupolar, o la versión vectorial definida como $\mathbf{Q}=\hat{n}\cdot\bar{\bar{Q}}$. Escrito en coordenadas cartesianas es

$$Q_{i,j}=\sum_\alpha(3x_{\alpha i}(t)x_{\alpha j}(t)-\delta_{ij}|x_\alpha|^2)q_\alpha \quad\rightarrow\quad Q_{i,j}=q(3x_{qi}x_{qj}-\delta_{ij}|x_q|^2) \tag{26}$$

y reemplazamos:

$$|x_q|^2=a^2[cos^2(\omega t)+sen^2(\omega t)]=a^2 \qquad x_{qx}=acos(\omega t) \qquad x_{qy}=asen(\omega t) \qquad x_{qz}=0$$

$$\rightarrow \bar{\bar{Q}}=q\begin{pmatrix}3a^2cos^2(\omega t)-a^2 & 3a^2cos(\omega t)sen(\omega t) & 0\\ 3a^2sen(\omega t)cos(\omega t) & 3a^2sen^2(\omega t)-a^2 & 0\\ 0 & 0 & -a^2\end{pmatrix}$$

$$=qa^2\begin{pmatrix}3cos^2(\omega t)-1 & 3cos(\omega t)sen(\omega t) & 0\\ 3sen(\omega t)cos(\omega t) & 3sen^2(\omega t)-1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{27}$$

Como estamos considerando campo lejano, usamos $\hat{n}=\hat{r}$, y usando los ángulos de esféricas en las direcciones cartesianas queda

$$\Rightarrow\quad \mathbf{Q}=\bar{\bar{Q}}\cdot\hat{r}=qa^2\begin{pmatrix}3cos^2(\omega t)-1 & \frac{3}{2}sen(2\omega t) & 0\\ \frac{3}{2}sen(2\omega t) & 3sen^2(\omega t)-1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}cos\varphi sen\theta\\ sen\varphi sen\theta\\ cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{r},t)=qa^2\begin{pmatrix}[3cos^2(\omega t)-1]cos\varphi sen\theta+\frac{3}{2}sen(2\omega t)sen\varphi sen\theta\\ \frac{3}{2}sen(2\omega t)cos\varphi sen\theta+[3sen^2(\omega t)-1]sen\varphi sen\theta\\ cos\theta\end{pmatrix} \tag{28}$$

Esta expresión sirve para calcular el término cuadrupolar eléctrico de los campos de radicación mediante la formulación de momentos dependientes del tiempo. Los términos independientes del tiempo de aquí arriba no van a contribuir cuando se tomen las derivadas temporales, por lo que podemos usar

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{r},t) = qa^2 \begin{pmatrix} 3cos^2(\omega t)cos\varphi sen\theta + \frac{3}{2}sen(2\omega t)sen\varphi sen\theta \\ \frac{3}{2}sen(2\omega t)cos\varphi sen\theta + 3sen^2(\omega t)sen\varphi sen\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \text{parte que no depende del tiempo.} \quad (29)$$

[queda como ejercicio escribir esto con la dependencia armónica en el tiempo factorizada]

Calculamos los campos de radiación a partir de la formulación que usa los momentos dependientes del tiempo. Para el momento dipolar eléctrico, de la ecuación (20) sale que

$$\ddot{\boldsymbol{p}}(\mathbf{r},t) = -qa\omega^2(cos\omega t\hat{x} + sen\omega t\hat{y}) \quad (30)$$

Para el momento magnético tenemos, siguiendo de la ecuación (25),

$$\ddot{\boldsymbol{m}} = 0 \quad (31)$$

Para la contribución del momento cuadrupolar eléctrico tenemos que derivar la ecuación (29):

$$\Rightarrow \quad \dddot{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{r},t) = qa^2\omega^3 12sen\theta \begin{pmatrix} \cos\varphi sen2\omega t - sen\varphi cos2\omega t \\ -\cos\varphi cos2\omega t - sen\varphi sen2\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\dddot{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{r},t) = qa^2\omega^3 12sen\theta[sen(2\omega t-\varphi)\hat{x} - cos(2\omega t-\varphi)\hat{y}] \quad (33)$$

en donde se usaron algunas de las siguientes identidades trigonométricas:

$$sen(x \pm y) = sen(x)cos(y) \pm sen(y)cos(x)$$
$$cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sen(y)sen(x)$$
$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x) = 2cos^2(x) - 1 = 1 - 2sen^2(x)$$
$$sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$$

Por último, para obtener los campos necesitamos hallar productos como: $\hat{r}\times\ddot{\boldsymbol{p}}$, por lo que será conveniente escribir $\ddot{\boldsymbol{p}}$ en el sistema de coordenadas esféricas, y recordar que $\hat{r}\times\hat{r} = 0$, $\hat{r}\times\hat{\theta} = \hat{\varphi}$ y $\hat{r}\times\hat{\varphi} = -\hat{\theta}$, con:

$$\hat{x} = \sin\theta\,\cos\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\,\cos\varphi\,\hat{\theta} - \sin\varphi\,\hat{\varphi}$$
$$\hat{y} = \sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\,\varphi\,\hat{\varphi}$$
$$\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$\rightarrow \quad \hat{r}\times\ddot{\boldsymbol{p}} = -qa\omega^2[cos\omega t(cos\theta cos\varphi\hat{\varphi} + sin\varphi\hat{\theta}) + sen\omega t(cos\theta sin\varphi\hat{\varphi} - cos\varphi\hat{\theta})] \quad (34)$$

$$\rightarrow \quad \hat{r}\times\ddot{\boldsymbol{p}} = qa\omega^2[-\cos(\omega t-\varphi)\cos\theta\,\hat{\varphi} + \sin(\omega t-\varphi)\hat{\theta}] \quad (35)$$

Operando nuevamente, se tiene

$$\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\boldsymbol{p}}) = qa\omega^2[\cos(\omega t - \varphi)\cos\theta\,\hat{\theta} + \sin(\omega t - \varphi)\hat{\varphi}] \tag{36}$$

También necesitamos $\hat{r} \times \dddot{\boldsymbol{Q}}$,

$$\hat{r} \times \dddot{\boldsymbol{Q}} = \quad ... \tag{37}$$

$$= 12qa^2\omega^3 \sin\theta[\sin(2\omega t - 2\varphi)\cos\theta\,\hat{\varphi} + \cos(2\omega t - 2\varphi)\,\hat{\theta}] \tag{38}$$

Y a esto volverle a aplicar $\hat{r}\times$ para el obtener el término cuadrupolar eléctrico,

$$\hat{r} \times (\hat{r} \times \dddot{\boldsymbol{Q}}) = 12qa^2\omega^3 \sin\theta[-\sin(2\omega t - 2\varphi)\cos\theta\,\hat{\theta} + \cos(2\omega t - 2\varphi)\,\hat{\varphi}] \tag{39}$$

Finalmente, tenemos los campos de radiación:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{rad} = \quad & \frac{qa\omega^2}{c^2 r}\Big\{\cos(\omega t' - \varphi)\cos\theta\,\hat{\theta} + \sin(\omega t' - \varphi)\hat{\varphi} + \\ & \frac{2a\omega}{c}\sin\theta[-\sin(2\omega t' - 2\varphi)\cos\theta\,\hat{\theta} + \cos(2\omega t' - 2\varphi)\,\hat{\varphi}]\Big\}\Big|_{t'=t_{ret}}\end{aligned} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{B}_{rad} = \hat{r} \times \boldsymbol{E}_{rad} \tag{41}$$

donde $t_{ret} \sim t - \frac{r}{c}$. Se ve que los campos oscilan con dos frecuencias distintas, ω y 2ω, una debida a la radiación dipolar eléctrica y la otra por la cuadrupolar.

- Calcular la potencia por unidad de ángulo sólido y graficar su promedio temporal en función de la dirección.

Utilizando las ecuaciones (17) y (18), y teniendo en cuenta los campos de radiación calculados, la potencia por unidad de ángulo solido en este problema es:

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{E_{rad}}|^2 r^2 \tag{42}$$

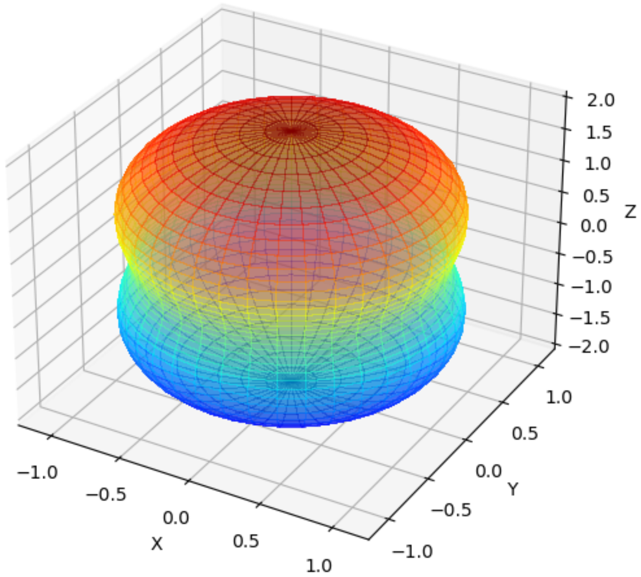
Vamos a considerar el primer orden no nulo en el desarrollo:

$$\frac{dP}{d\Omega}^{(0)}(t) = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{E}_{rad}^{dip.elec}|^2 r^2 = q^2\frac{a^2\omega^4}{c^3 4\pi}[cos^2(\varphi - \omega t')cos^2\theta + sen^2(\varphi - \omega t')]|_{t_{ret}} \tag{43}$$

y el promedio temporal es,

$$\langle\frac{dP}{d\Omega}^{(0)}\rangle_\tau = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^\tau dt\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{\omega^5 a^2 q^2}{8\pi^2 c^3}\int_0^{2\pi/\omega}[cos^2(\varphi - \omega t_{ret})\ \ cos^2\theta + sen^2(\varphi - \omega t_{ret})]dt \tag{44}$$

$$= \frac{\omega^5 a^2 q^2}{8\pi^2 c^3}\int_0^{2\pi/\omega}[cos^2(\varphi - \omega t + \omega r/c)\,cos^2\theta + sen^2(\varphi - \omega t + \omega r/c)]dt = \frac{q^2 a^2 \omega^4}{8\pi c^3}(cos^2\theta + 1) \tag{45}$$



Promedio temporal de la potencia irradiada para el problema 5 ítem (a) a orden dipolar eléctrico, en una superficie con r constante. (la escala de colores no tiene es solo para distinguir mejor el gráfico de la superficie)

Donde al evaluar en t_{ret} se aproxima $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}| = r$ y se utiliza que $\int_0^{2\pi/\omega} dtcos^2(\varphi - \omega t + \omega r/c) = \int_0^{2\pi/\omega} dtsen^2(\varphi - \omega t + \omega r/c) = \frac{\pi}{\omega}$.

- Calcular la potencia total emitida en todas las direcciones y su promedio temporal.

La potencia total emitida es simplemente integrar en ángulo solido a la potencia por unidad de ángulo solido. Esto es,

$$P(t) = \int_0^{2\pi} \frac{dP}{d\Omega}(t)\, d\Omega = \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta sen\theta |E_{rad}|^2 r^2 = q^2 \frac{a^2\omega^4}{4\pi\, c^3} (\frac{2}{3} + 2)\pi = q^2 \frac{a^2\omega^4}{c^3} \frac{2}{3} \tag{46}$$

Cómo quedo independiente del tiempo, esta expresión es también el promedio temporal. Y corresponde a la fórmula de Larmor no relativista.