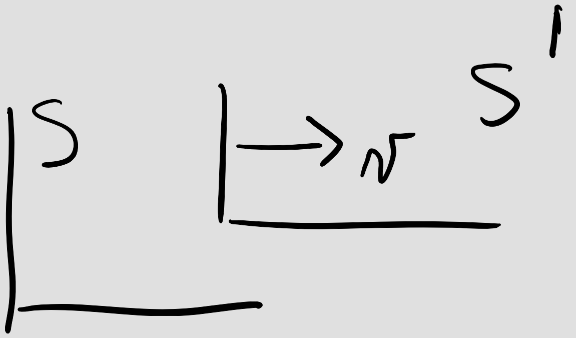


pido Trans lineal homogenea

$[\alpha]=[\delta]=1$
$[\beta]=\frac{T}{L}=\frac{1}{V}$
$[\gamma]=\frac{L}{T}=V$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \gamma(v) & \delta(v) \end{pmatrix}}_{\Lambda(v)} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

GRUPO
- Clausura $\Lambda(v_1).\Lambda(v_2)=\Lambda(v_3)$
- Asociatividad ✓
- $\exists \ \mathbb{1}=\Lambda(0)$
- $\Lambda(v)\Lambda(-v)=\mathbb{1} \Rightarrow \Lambda^{-1}(v)=\Lambda(-v)$

$\circledast$ origen S': $(t', x'=0) \Rightarrow$ en S: (t, vt)

$$\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \gamma(v) & \delta(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ vt \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma(v) = -v\,\delta(v)}$$

$\circledast$ origen S: $(t, x=0) \Rightarrow$ en S': $(t', -vt')$

$$\begin{pmatrix} t' \\ -vt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \gamma(v) & \delta(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$t' = \alpha(v)\,t$
$-vt' = \gamma(v)\,t$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma(v) = -v\,\alpha(v)}$$

$\odot$ $\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ -v\alpha(v) & \alpha(v) \end{pmatrix}$ Rec $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$

$$\Lambda^{-1}(v) = \frac{1}{\alpha^2(v) + v\beta(v)\alpha(v)} \begin{pmatrix} \alpha(v) & -\beta(v) \\ v\alpha(v) & \alpha(v) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(-v) & \beta(-v) \\ v\alpha(-v) & \alpha(-v) \end{pmatrix} = \Lambda(-v)$$

* Espacio-Tiempo isótropo $\alpha(v) = \alpha(-v)$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha^2(v) + v\beta(v)\alpha(v) = 1}$$

ó $\beta(v) = \dfrac{1-\alpha^2(v)}{v\alpha(v)}$ $v \neq 0$

Recapitulemos: Tenemos

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ -v\alpha(v) & \alpha(v) \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} \beta(v) = \dfrac{1-\alpha^2(v)}{v\alpha(v)} & v \neq 0 \\ \beta(v) = 0, \ \alpha(v) = 1 & v = 0 \end{cases}$$

FALTA USAR CLAUSURA:

$$\Lambda(v_1)\cdot\Lambda(v_2) = \begin{pmatrix} \alpha(v_1) & \beta(v_1) \\ -v_1\alpha(v_1) & \alpha(v_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha(v_2) & \beta(v_2) \\ -v_2\alpha(v_2) & \alpha(v_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(v_1)\alpha(v_2) - v_2\beta(v_1)\alpha(v_2) & \alpha(v_1)\beta(v_2) + \beta(v_1)\alpha(v_2) \\ -\alpha(v_1)\alpha(v_2)(v_1+v_2) & \alpha(v_1)\alpha(v_2) - v_1\alpha(v_1)\beta(v_2) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \Lambda(v_3)$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha(v_1)\alpha(v_2)} - v_2\,\beta(v_1)\,\alpha(v_2) = \cancel{\alpha(v_1)\alpha(v_2)} - v_1\,\alpha(v_1)\,\beta(v_2)$$

$$\Rightarrow v_2\,\frac{\left(\alpha^2(v_1)-1\right)}{v_1\,\alpha(v_1)}\,\alpha(v_2) = v_1\,\frac{\left(\alpha^2(v_2)-1\right)}{v_2\,\alpha(v_2)}\,\alpha(v_1)$$

$$\Rightarrow \frac{v_1^2\,\alpha^2(v_1)}{\alpha^2(v_1)-1} = \frac{v_2^2\,\alpha^2(v_2)}{\alpha^2(v_2)-1} \overset{!}{=} K = c^2$$

$$\frac{v^2\alpha^2(v)}{\alpha^2(v)-1} = c^2 \qquad v^2\alpha^2(v) = c^2\left(\alpha^2(v)-1\right)$$

$$\Rightarrow c^2 = \alpha^2(v)\left(c^2-v^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

$$\Lambda(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix}$$

$$\circledast \quad c \to \infty \qquad \Lambda_{GAL} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} t' &= T \\ x' &= x - vT \end{aligned}$$

$$\circledast \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cT \\ x \end{pmatrix} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \beta = v/c$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct) - \beta\gamma x \\ x' = -\beta\gamma(ct) + \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} c\,dt' = c\gamma\,dt - \beta\gamma\,dx \\ dx' = -v\gamma\,dt + \gamma\,dx \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad \vec{u}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\,dx - v\gamma\,dt}{\gamma\,dt - \frac{v}{c^2}\gamma\,dx} = \frac{dx - v\,dt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

$$\boxed{u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}}$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\,dt - \frac{v}{c^2}\gamma\,dx} = \frac{dy/dt}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}$$

$$\boxed{u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}} \qquad \boxed{u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}}$$

si $v \to \vec{v} = v\,\hat{n}$ $\qquad \vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$

$$\vec{u}'_{\parallel} = \frac{\vec{u}_{\parallel} - \vec{v}}{1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}} \qquad \vec{u}'_{\perp} = \frac{\vec{u}_{\perp}}{\gamma\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)}$$

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct') + \beta\gamma x' \\ x = \beta\gamma(ct') + \gamma x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

NO ↘ SE

ABUSO:

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu}$$

SO ↗ NE

$$\Rightarrow \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \Lambda_{\mu}{}^{\rho} = \delta_{\nu}^{\rho} = \begin{cases} 1 & \rho = \nu \\ 0 & \rho \neq \nu \end{cases}$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} \qquad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$$

$$= c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \eta_{\mu\rho}\, \Lambda^{\rho}{}_{\alpha} = \eta_{\nu\alpha}$$

Transf Modelo

- $dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, dx^{\nu}$ vector contrav.
- $\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, \partial_{\nu}$ vector covariante

- **OBS:** si A^{μ} es vect contr. $\Rightarrow$

  $\Rightarrow A_{\mu} \equiv \eta_{\mu\nu} A^{\nu}$ es vec. covari.

- **OBS:** si B_{μ} es vec covariante

  $\Rightarrow B^{\mu} \equiv \eta^{\mu\nu} B_{\nu}$ es vec. contrav.

- **OBS:** $A^{\mu} B_{\mu}$ = escalar

$$A'^{\mu} B'_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \Lambda_{\mu}{}^{\rho}\, A^{\nu} B_{\rho} = \delta_{\nu}{}^{\rho} A^{\nu} B_{\rho}$$

$$= A^{\rho} B_{\rho}$$

fase de onda plana:

$$\phi = e^{i\bar{k}\cdot\bar{x} - i\omega t} = e^{-iK_\mu x^\mu} = e^{-iK^\mu x_\mu}$$

$$K^\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c}, \vec{K}\right) \qquad K_\mu = \left(\frac{\omega}{c}, -\vec{K}\right)$$

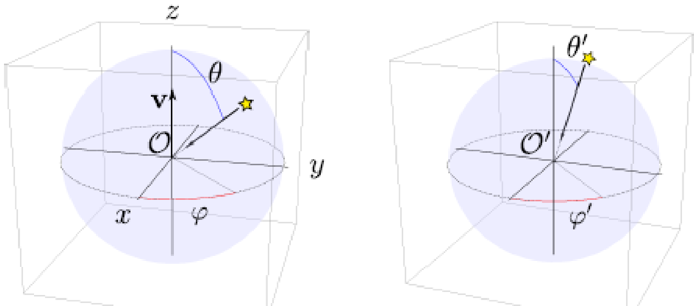
dada Transf Lorentz:
- Transforma la amplitud (mezcla)
- Transforman las coordenadas

$$e^{-iK_\mu x^\mu} \longrightarrow e^{-iK_\mu \Lambda_\nu{}^\mu x'^\mu} = e^{-iK'_\nu x'^\nu}$$

$$K'_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu K_\mu \quad \text{(vec cov.)}$$

$$K^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu K^\mu \quad \text{(vec contravar)}$$

1. (El cielo relativista.) El observador $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad relativa $\mathbf{v}$ respecto de $\mathcal{O}$. En cierto instante, los dos observadores coinciden en el mismo punto del espacio. En ese momento, los dos reciben luz proveniente de una misma estrella muy lejana. Ambos observadores eligen su eje z en la dirección de $\mathbf{v}$, de modo que escribirán el vector de la velocidad de la luz recibida según expresiones análogas; el observador $\mathcal{O}$, por ejemplo, escribirá $\mathbf{c}_{\mathcal{O}} = -\Big(\cos\varphi\,\sin\theta\,\hat{x} + \sin\varphi\,\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\Big)\,c$. Obviamente, $|\mathbf{c}_{\mathcal{O}}| = |\mathbf{c}_{\mathcal{O}'}| = c$.



(a) Si $\mathcal{O}$ recibe la luz según la dirección definida por los ángulos θ y φ, aplicando las fórmulas de transformación de velocidades, muestre que, según $\mathcal{O}'$, la luz proviene de la dirección definida por los ángulos

$$\varphi' = \varphi, \qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta}. \qquad (\beta = v/c)$$

(c) Una fórmula importante, que puede deducir de lo anterior, relaciona las tangentes de los ángulos θ y θ'. Sabiendo que $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos x)$ y $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$, deduzca la *fórmula de aberración relativista*:

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\tan\frac{\theta}{2}.$$

(b) Deduzca estas mismas expresiones a partir de la transformación del cuadrivector número de onda.

2. Sobre un espejo plano que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ paralela a su normal incide luz de frecuencia ω_i con un ángulo de incidencia θ_i, como muestra la figura.

(a) Encuentre la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Analice el caso $v \ll c$ y compare con el rebote de partículas no relativistas contra una pared en movimiento.

(b) Encuentre la frecuencia de la onda reflejada. Para incidencia normal analice qué pasa cuando $v \ll c$ y compare con lo que cabría esperar si, en lugar de luz, hubiera un flujo de partículas o de sonido contra una pared en movimiento.