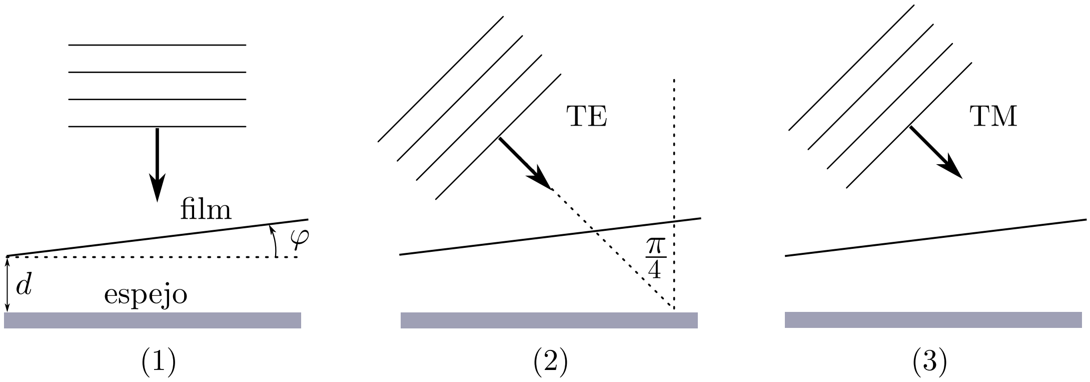
Ondas electromagnéticas.

1. *(Análisis de las experiencias de Wiener)* En 1890, Wiener realizó tres experiencias para demostrar la existencia de ondas electromagnéticas estacionarias y comprobar cuál de las magnitudes asociadas a las ondas causaba el proceso fotoquímico en las emulsiones fotográficas. Dichas experiencias consistieron en: (1) Hacer incidir normalmente sobre un espejo una onda plana con polarización lineal. (2) Hacer incidir una onda plana TE sobre un espejo con un ángulo de incidencia de 45°. (3) Idem que el anterior, pero TM. En cada caso Wiener interpuso una placa con una película fotográfica muy delgada (de espesor $\sim \lambda/20$) formando un ángulo φ con el plano del espejo, como muestra la figura. La distancia mínima entre la película y el espejo es d. Wiener encontró que al revelar la película aparecía un patrón de rayas negras, diferente en cada caso.



En las experiencias (1) y (2) aparecían franjas oscuras y claras alternadas en la película. En particular, si la película se colocaba sobre el espejo ($\varphi = 0, d = 0$), no registraba ninguna impresión. En la experiencia (3), no se observaban franjas en absoluto.

Para cada uno de los casos (1), (2) y (3), calcular:

a) $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en la región frente al espejo.

b) El vector de Poynting y su valor medio temporal.

c) La densidad de energía eléctrica y su valor medio temporal.

d) La densidad de energía magnética y su valor medio temporal.

En función de estos resultados y de las observaciones experimentales antes señaladas, determinar cuál de las magnitudes calculadas puede ser la causante de la impresión sobre la película. Además, para cada experimento, predecir el espaciamiento entre dos franjas oscuras de la película, en función del ángulo φ, de la distancia d y de la longitud de onda.

2. Encontrar las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas en el problema de una interfase entre dos dieléctricos (μ, ϵ, μ', ϵ') para incidencia TM y TE.

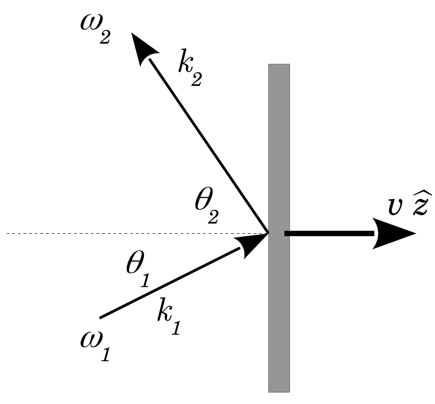
3. Sobre una superficie dieléctrico-vacío, incide desde el dieléctrico (índice n real, $\mu = 1$) una onda plana linealmente polarizada con polarización TM, con un ángulo mayor que el ángulo crítico.

   a) Encontrar el vector de onda de la onda transmitida. Escribir explícitamente la parte real y la parte imaginaria del vector de onda. ¿En qué dirección se propaga la onda transmitida? ¿En qué dirección se atenúa? ¿Cuál es la longitud típica de atenuación?

   b) Mostrar que en la zona de vacío no hay, en promedio, flujo del vector de Poynting en la dirección normal.

   c) Si la onda en la situación anterior incidiera además con el ángulo de Brewster, no habría tampoco onda reflejada. ¿Es esto posible?

4. Una interfase plana se mueve con velocidad constante. La interfase está definida por la ecuación $z = vt$. La región $z < vt$ corresponde al vacío. Del otro lado, moviéndose también a velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{z}$, hay un medio lineal, isótropo y homogéneo, que no interesa definirlo (si desea, puede suponer que se trata de un espejo en movimiento). Suponga que incide una onda desde el vacío, con número de onda $\mathbf{k}_1 = \cos\theta_1\,\hat{z} + \operatorname{sen}\theta_1\,\hat{x}$ (real) y frecuencia ω_1, de manera que todo transcurre en el plano xz. Recordar que la onda es verdaderamente incidente si $\cos\theta_1 > 0$ y $\omega_1 > 0$.



   Determine la frecuencia ω_2 y el número de onda $\mathbf{k}_2 = -\cos\theta_2\,\hat{z} + \operatorname{sen}\theta_2\,\hat{x}$ de la onda reflejada. Encuentre la relación entre el ángulo de incidencia y el reflejado.

5. Una lámina dieléctrica de permitividad ϵ_2 y espesor d separa dos medios semi-infinitos que tienen permitividades ϵ_1 y ϵ_3, respectivamente ($\mu = 1$ en todo el espacio). Una onda plana incide sobre la interfase que separa los medios 1 y 2, formando un ángulo θ con la normal.

a) Escriba el sistema de ecuaciones que determina todos los campos.

b) Resuelva las ecuaciones para los campos suponiendo incidencia normal ($\theta = 0$). En particular, demuestre que el campo reflejado hacia el primer medio y el transmitido hacia el tercero tienen las siguientes amplitudes respecto del campo incidente

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{R_{12} + R_{23}e^{2i\alpha}}{1 + R_{12}R_{23}\, e^{2i\alpha}} \quad , \quad \frac{E_t}{E_i} = \frac{T_{12}T_{23}e^{i\alpha}}{1 + R_{12}R_{23}\, e^{2i\alpha}}$$

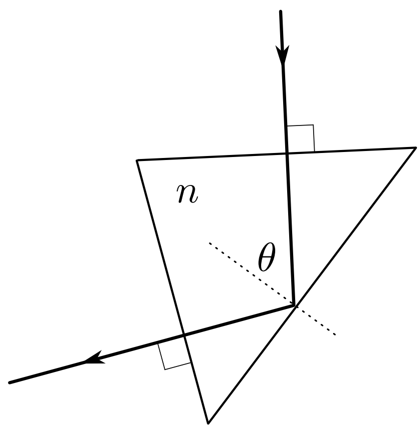
donde R_{ij} y T_{ij} son los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión para una sola interfase y $\alpha = n_2\omega d/c$.

c) Para $\theta = 0$, calcule el promedio temporal de los vectores de Poynting en los tres medios. Demuestre que son iguales. (Puede ser útil saber que: $T_{ij}T_{ji} = 1 - R_{ij}^2$.)

d) Para $\theta = 0$, ¿qué condición deben cumplir d y los ϵ_i para que no haya onda reflejada en el medio 1?

6. Una onda electromagnética plana polarizada a 45° respecto del plano de incidencia es totalmente reflejada en un prisma al cual entra y sale normalmente a las respectivas caras. Demostrar que la intensidad del rayo emergente es $16n^2/(1+n)^4$ veces la intensidad incidente, donde n es el índice de refracción del material del prisma. Demostrar que el rayo emergente está elípticamente polarizado, con un desfasaje

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta}\sqrt{\text{sen}^2\theta - n^{-2}} \qquad (1)$$



7. Demostrar que una onda plana que incide sobre la superficie de separación de dos dieléctricos, ejerce una presión de radiación:

$$p_{rad} = \frac{1}{8\pi}(\epsilon_1(|E_{inc}|^2 + |E_{ref}|^2)\cos^2(\theta_{inc}) - \epsilon_2|E_{trans}|^2\cos^2(\theta_{trans})),$$

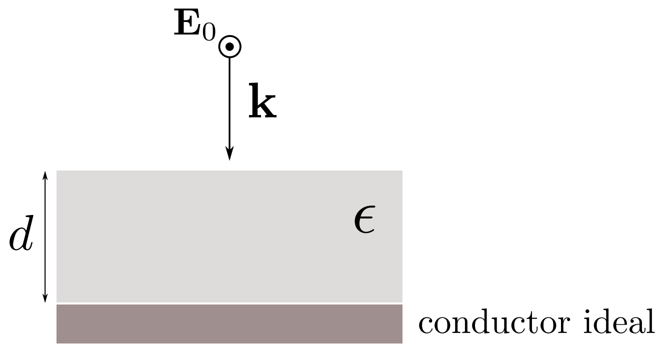
donde ϵ_1 es la constante del medio de incidencia, y ϵ_2 es las constante del medio refractante.

Sugerencias: Plantear la conservación del impulso lineal en términos de promedios temporales. Para ello, es útil usar (y demostrar) que si dos campos vectoriales $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ son armónicos, el promedio temporal de su producto escalar es:

$$\langle Re\{\mathbf{A}\}, Re\{\mathbf{B}\}\rangle = \frac{1}{2} Re\{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*\}$$

Por otro lado, como la presión de radiación no depende de la polarización de la onda incidente (¿por qué?), puede hacerse el cálculo eligiendo polarización TE o TM.

8. Una onda plana linealmente polarizada incide en forma normal sobre la superficie de un espejo. El espejo está formado por una lámina dieléctrica de espesor d depositada sobre un conductor ideal. El dieléctrico está caracterizado por $\mu = 1$ y permitividad ϵ. Plantee las condiciones de contorno y resuelva los campos en todo el espacio.



9. *a*) Hallar la presión de radiación producida por una onda plana que incide normalmente desde el vacío sobre la superficie de un conductor perfecto. Verificar que es igual a la densidad de energía de la onda.

   b) Demostrar que la densidad de energía y la presión ejercida son también iguales en el caso en que la onda incide normalmente sobre una superficie totalmente absorbente.

   c) ¿Qué radio debe tener una esfera hecha de un material con densidad 1 g cm^{-3}, que absorbe toda la luz que le llega, para que la presión de radiación de la luz solar compense la atracción gravitatoria del Sol? Aproximar la potencia de la radiación solar por $P = 4 \times 10^{26}$ W.

10. Encuentre la relación entre la energía asociada al campo eléctrico y magnético en una onda plana que se propaga en un medio conductor lineal, isótropo y homogéneo. Halle las expresiones límite para:

    a) Un mal conductor (¿dieléctrico con pérdidas?).

    b) Un buen conductor.

11. Deducir la expresión para la longitud de atenuación de una onda electromagnética plana que se propaga en un medio conductor, en los casos límites de buen y mal conductor. Calcule la longitud de atenuación en cobre para una frecuencia de 60 Hz ($\sigma \approx 5 \times 10^{17}$ s^{-1}), y para ondas de radio de 100 kHz en agua de mar ($\sigma \approx 5 \times 10^{10}$ s^{-1}).

12. Demostrar que para un buen conductor el coeficiente de reflexión es aproximadamente $r \approx 1 - 2\delta\omega/c$ donde δ es la longitud de atenuación.

13. Cuando rayos X inciden sobre la superficie de un metal con un ángulo mayor que un cierto ángulo crítico θ_0 sufren reflexión total. Calcular θ_0 como función de la frecuencia de los rayos X para el caso de polarización en la dirección perpendicular al plano de incidencia (modo TE). Calcular la conductividad del metal aproximando a los electrones en su interior como libres, con una densidad $n \approx 8 \times 10^{22}$ cm^{-3}, y despreciando el efecto de los átomos, por ser éstos mucho más pesados. Usar como dato que la conductividad a bajas frecuencias es $\sigma_0 \approx 5 \times 10^{-17}\,\mathrm{s}^{-1}$.

14. *(Rotación de Faraday)* Un "plasma tenue" está formado por cargas eléctricas libres, de masa m y carga e, con una densidad de n cargas por unidad de volumen. Si se hacen incidir ondas electromagnéticas planas en el plasma, suponiendo que la densidad es uniforme y que las interacciones entre las cargas pueden despreciarse:

    a) Encontrar la conductividad σ en función de ω.

    b) Hallar la relación de dispersión (es decir, la relación entre k y ω).

    c) Calcular el índice de refracción en función de ω. ¿Qué sucede si $\omega < \omega_p$, donde ω_p es la frecuencia de plasma, definida por $\omega_p^2 \equiv 4\pi n e^2/m$?

    d) Supóngase ahora que existe un campo magnético externo $\mathbf{B}_{\mathrm{ext}}$. Considerando ondas planas que se propagan en dirección paralela a $\mathbf{B}_{\mathrm{ext}}$, mostrar que el índice de refracción es diferente para ondas polarizadas circularmente en dirección izquierda y derecha (asumir que el campo magnético de la onda plana es despreciable frente a $\mathbf{B}_{\mathrm{ext}}$).

    e) Concluir del punto anterior que el plano de polarización de una onda plana linealmente polarizada, propagándose en dirección paralela al campo magnético externo, rota en un ángulo proporcional a la distancia que viaja la onda. Calcular la constante de proporcionalidad.

15. Considere un cable coaxil con eje de simetría en la dirección $\hat{z}$. El núcleo del cable coaxil está formado por un conductor cilíndrico, y concéntrico con éste, hay un dieléctrico de permitividad ϵ. Un mallado conductor (en contacto con el dieléctrico) envuelve todo el conjunto.

a) Escriba la ecuación para la propagación de los campos **E** y **H**, bajo el supuesto de que $k_r = k_\varphi = 0$, esto es, no hay propagación transversal (modo transversal electromagnético, o TEM).

b) Resuelva las ecuaciones anteriores con la condición de conductor perfecto para el mallado exterior. ¿encuentra una frecuencia de corte?

Preguntas conceptuales.

1. ¿En qué situaciones son válidas las relaciones de Fresnel entre las amplitudes incidente, reflejada y transmitida?

2. Desde el punto de vista cuántico, la presión de radiación se calcula teniendo en cuenta el impulso lineal transportado por los fotones. ¿Qué sugieren los resultados de los problemas sobre la relación entre la energía y el impulso de un fotón?

3. Las ondas electromagnéticas que se propagan en un medio de índice de refracción inhomogéneo, ¿son necesariamente transversales?

4. ¿Por qué la velocidad de transporte de la energía no puede ser dado por la velocidad de fase?