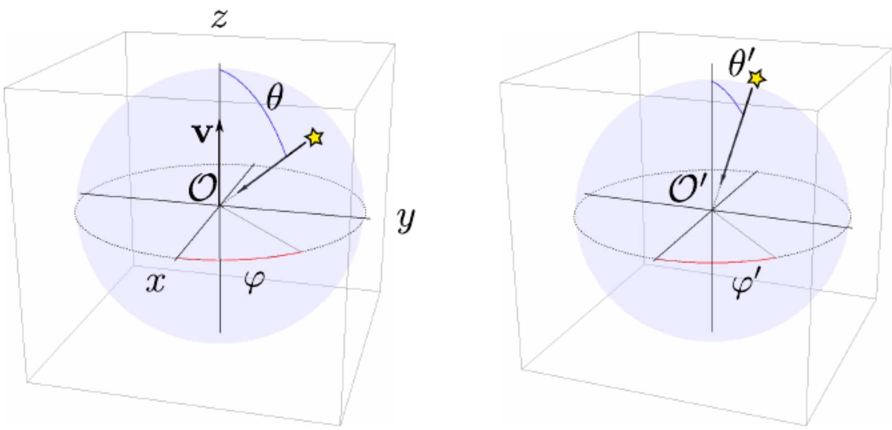
Formulación covariante del campo electromagnético.

Transformación de los campos y de las fuentes.

1. El observador $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad relativa $\mathbf{v}$ respecto de $\mathcal{O}$. En cierto instante, los dos observadores coinciden en el mismo punto del espacio. En ese momento, los dos reciben luz proveniente de una misma estrella muy lejana. Ambos observadores eligen su eje $\hat{z}$ en la dirección de $\mathbf{v}$, de modo que escribirán el vector de la velocidad de la luz recibida según expresiones análogas; el observador $\mathcal{O}$, por ejemplo, escribirá

$$c_{\mathcal{O}} = -c\,(\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}) \tag{1}$$

donde $|c_{\mathcal{O}}| = |c_{\mathcal{O}'}| = 0$.



a) Si $\mathcal{O}$ recibe la luz según la dirección definida por los ángulos θ y φ, aplicando las fórmulas de transformación de velocidades, muestre que, según $\mathcal{O}'$, la luz proviene de la dirección definida por los ángulos

$$\varphi' = \varphi \quad , \quad \cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\,\cos\theta} \qquad (\beta = v/c) \tag{2}$$

b) Deduzca estas mismas expresiones a partir de la transformación del cuadrivector número de onda.

c) Una fórmula importante, que puede deducir de lo anterior, relaciona las tangentes de los ángulos θ y θ'. Sabiendo que $\mathrm{sen}^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$ y $\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$, deduzca la fórmula de *aberración relativista*

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\tan\frac{\theta}{2} \tag{3}$$

2. A partir de la expresión del tensor de intensidad del campo electromagnético, obtener las leyes de transformación de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ al cambiar de sistema de referencia inercial. Analizar los siguientes casos particulares: 1) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$; 2) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$; 3) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$; 4) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$. Demostrar que:

   a) Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares en un sistema de referencia, lo mismo sucede en cualquier otro.

   b) Si $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$ en un sistema de referencia, esto se cumple en cualquier otro sistema.

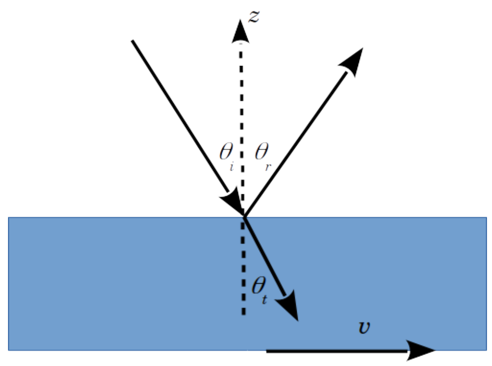
   c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces hay un sistema en el cual sólo hay campo eléctrico o solamente magnético. ¿Siempre hay solución? ¿Es única?

3. En un sistema de referencia inercial S, el campo eléctrico forma un ángulo θ con el campo magnético. Ambos campos son uniformes y estáticos.

   a) Encontrar un sistema de referencia S' tal que los campos sean paralelos.

   b) Si en S los módulos de los campos cumplen $B_0 = 2E_0$, calcular los campos en el sistema de referencia hallado en (a). Tomar el límite para $\theta \ll 1$ y para $\theta \to \pi/2$. En cada caso verificar el comportamiento de los invariantes.

4. En el sistema de laboratorio, una onda plana, de frecuencia ω y amplitud $\mathbf{E}$, incide desde el vacío sobre la superficie de un líquido de índice de refracción n y $\mu = 1$. El líquido ocupa el semiespacio $z < 0$ y se mueve con velocidad v paralela a su superficie. En el laboratorio, la polarización de la onda puede ser TE o TM. Encuentre la dirección, la amplitud, la polarización y la frecuencia de las ondas transmitidas y reflejadas en el sistema de laboratorio.



5. Un cilindro circular macizo y de longitud infinita tiene densidad de carga y de corriente uniformes. La corriente es paralela al eje del cilindro.

   a) Encontrar un sistema de referencia en el cual sólo hay campo magnético o eléctrico. ¿Es único?

   b) Hallar el valor de los campos en el nuevo sistema.

6. Una barra infinitamente larga y de sección circular está cargada uniformemente en volumen.

   a) Calcular los campos en un sistema de referencia que se mueve paralelo a la barra. Primero, a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, y luego por transformación directa de los campos.

b) Ahora hay dos barras como la anterior, dispuestas una paralela a la otra y en reposo relativo. Demostrar que la fuerza por unidad de longitud sobre cualquiera de las barras, medida en un sistema de referencia S' que se mueve paralelo a ellas, es la misma que en el sistema S en el que las barras están en reposo. Primero, a partir de la fuerza de Lorentz y de los campos en S', y luego demostrando que el objeto $f^\mu \equiv \frac{1}{c}F^\mu_{\ \nu} j^\nu$ es el cuadrivector que es generalización covariante de la densidad de fuerza. Como "yapa" del segundo método, obtener la ley de transformación relativista para la potencia disipada por efecto Joule.

7. Un dipolo magnético puntual $\mathbf{m}$ se encuentra en reposo en el origen de un sistema S', por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = 0$ y $\mathbf{A}' = \mathbf{m}\times\mathbf{r}'/r'^3$. El sistema S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema de laboratorio S.

   a) Demostrar que en S los potenciales a primer orden en β son

   $$\Phi = \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{m})\cdot\mathbf{R}}{c\,R^3}, \qquad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R^3} \tag{4}$$

   con $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, donde $\mathbf{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S.

   b) A partir de estos potenciales, calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en S y mostrar que el campo eléctrico se puede escribir de las siguientes maneras alternativas

   $$\begin{aligned}
   \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v}\times\mathbf{m}/c) - \mathbf{m}\times\frac{[3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v}]}{cR^3} \\
   \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v}\times\mathbf{m}/2c) + \frac{3}{2}\mathbf{n}\times\frac{[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{m} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\mathbf{v}]}{cR^3} \\
   \mathbf{E} &= \mathbf{B}\times\mathbf{v}/c,
   \end{aligned}$$

   donde $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ y $\mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{p})$ es el campo eléctrico de un dipolo efectivo de valor $\mathbf{p}$.

8. Un hilo con corriente I se encuentra sobre el eje x. La corriente puede atribuirse a una densidad lineal de carga de valor λ_0 que se mueve a velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{x}$, es decir $I = \lambda_0 v$. Obtener el campo eléctrico y magnético de un elemento de carga (con movimiento uniforme) sobre la base de las transformaciones de Lorentz del campo (recuerde que $\mathbf{B} = \beta\times\mathbf{E}$).

9. A partir del problema anterior, obtenga la expresión de Biot-Savart por integración del campo.

10. Dos partículas cargadas se mueven con velocidad constante en direcciones ortogonales. Calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre la otra en el instante en que una de las partículas cruza la dirección de movimiento de la otra. Verificar que las fuerzas no son iguales y opuestas. Por lo tanto, no se conserva el impulso lineal de las partículas ¿Hay en ello alguna contradicción?

Trayectorias de partículas cargadas.

11. Encontrar la trayectoria de una partícula cargada en cada caso:
    a) Movimiento en un campo eléctrico uniforme y estático, dirigido según el eje x. La condición inicial es $p_x = p_z = 0$ y $p_y = p_0$. Demostrar que en el límite no relativista se obtiene el resultado conocido de mecánica clásica, es decir, una parábola.
    b) Movimiento en un campo magnético uniforme y estático.
    c) Movimiento en campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ cruzados, perpendiculares entre sí, uniformes y estáticos. Considerar los tres casos posibles: (a) $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, (b) $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$ y (c) $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.

Preguntas conceptuales.

1. ¿Es posible que una partícula viaje con velocidad mayor que c?
2. ¿Es posible enviar señales a velocidades mayores que la de la luz? ¿Qué ocurre con la causalidad? (Visualizarlo en un diagrama de espacio-tiempo).
3. Una barra rígida forma un ángulo α con el eje x. En el instante inicial el centro de la barra está en el origen y toda la barra se mueve con velocidad v según el eje y. Determine la velocidad w del punto a de intersección de la barra con el eje x. ¿Puede ser $w > c$? ¿Puede utilizarse este sistema para enviar señales a velocidades mayores que c?
4. Un faro rota uniformemente con velocidad angular ω, emitiendo una señal luminosa. Si tomamos 2 puntos a y b muy alejados del faro, la señal pasa de a a b a velocidad mayor que c. ¿Contradice esto la Relatividad?
5. ¿Es compatible con la Relatividad la existencia de cuerpos perfectamente rígidos?
6. ¿En qué caso se conserva y en qué caso no, la dirección de una barra al hacer una transformación de Lorentz?
7. En un sistema de referencia S, el intervalo entre dos eventos dados es de tipo espacial. ¿Es posible encontrar un sistema S' tal que el intervalo entre los mismos eventos sea de tipo temporal?

8. ¿Cómo pueden graficarse los ejes de un sistema S' que se mueve con respecto a S en el diagrama de espacio-tiempo de S? ¿Qué ocurre con el cono de luz en ambos sistemas? ¿Cómo se ve en estos diagramas la relatividad de la simultaneidad?

9. El vector de onda de una onda plana, ¿es un invariante? ¿Qué tiene que ver esto con la aberración de la luz?

10. ¿Cuál es la ley de transformación de la fuerza de Lorentz?

11. ¿Por qué en el marco de la relatividad espacial no tiene sentido hablar de campo eléctrico o magnético, sino del campo electromagnético?

12. ¿En el caso de una carga en movimiento, si uno compara las líneas de campo eléctrico vistas desde el sistema S' en el que la carga está en reposo, con las líneas de campo vistas desde S, se ve que en este último caso las líneas se encuentran comprimidas en la dirección del movimiento. ¿No se contradice esto con el hecho de que $E_{\parallel}$ se conserva?

13. ¿Cómo se escriben las leyes de conservación de la energía y del impulso en forma covariante?