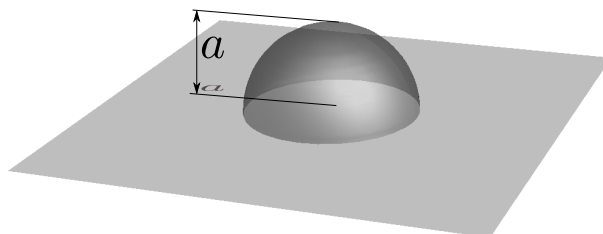


GUÍA 2: MÉTODO DE IMÁGENES, FUNCIÓN DE GREEN Y SEPARACIÓN DE VARIABLES

**Método de imágenes y función de Green.**

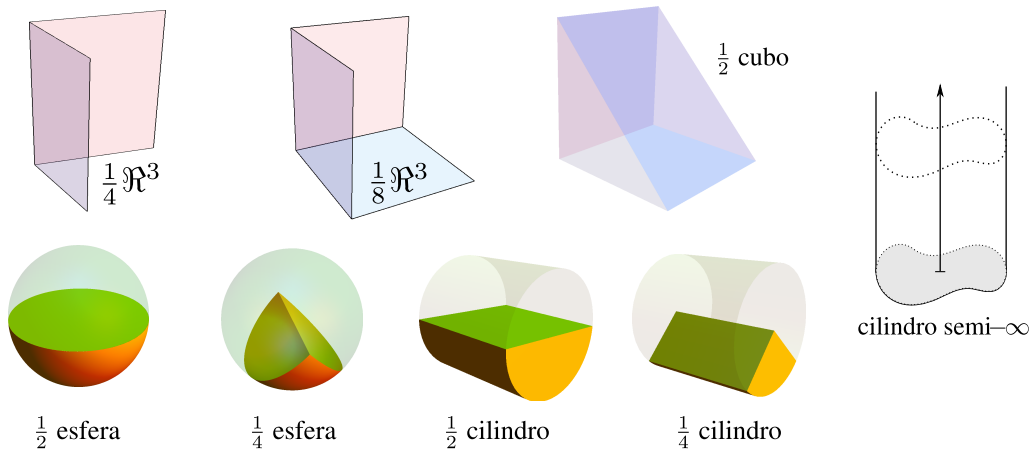
1. Una esfera conductora de radio  $a$  está conectada a potencial  $V$  y rodeada por una cáscara esférica de radio  $b$  cargada uniformemente con densidad  $\sigma$ .
  - (a) Escriba el potencial electrostático en todo el espacio usando el resultado del problema 8.(a) de la Guía 1 y superposición.
  - (b) Hallar el potencial por superposición a partir de la solución por imágenes del problema de una carga frente a una esfera.
  - (c) Encontrar la distribución de cargas imagen y la carga total inducida sobre la esfera conductora.
  - (d) ¿Puede encontrar otras distribuciones *imagen* que resuelvan el problema?
2. En la configuración del problema anterior:
  - (a) Hallar el potencial electrostático en todo el espacio utilizando el método de la función de Green.
  - (b) Analizar la relación entre el método de imágenes y el de la función de Green identificando la procedencia de cada una de las tres contribuciones a la integral de Green.
3. Un contorno mixto consiste en un plano infinito y una semiesfera de radio  $a$ , como muestra la figura.



Calcular la función de Green de Dirichlet en la región por encima del contorno. Identificar cada contribución.

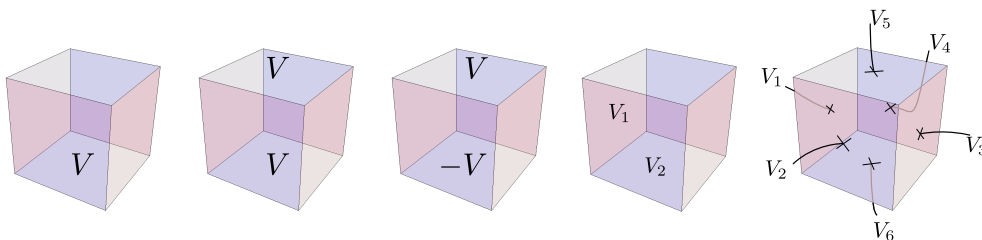
4. Una esfera de radio  $a$  está conectada a tierra. A una distancia  $d > a$  de su centro, hay un dipolo puntual  $\mathbf{p}$ .
  - (a) Calcular el potencial en todo el espacio usando el método de la función de Green.
  - (b) Ídem (a) pero mediante el método de imágenes. Verificar que ambos resultados coinciden.
  - (c) Calcular la densidad de carga inducida sobre la esfera y la carga total.
  - (d) Escribir el potencial para  $r \gg a$  conservando términos de hasta orden  $(a/r)^2$ . Interprete en términos de la carga total y del momento dipolar total de las cargas fuentes e imágenes.
  - (e) Encuentre ahora el potencial en el caso en que la esfera está aislada y descargada.

5. (Sin cuentas.) Las funciones de Green de Dirichlet del espacio no acotado, de la esfera, del interior de un cubo, del interior de un cilindro finito de base circular y del interior de un cilindro infinito de sección arbitraria se suponen conocidas. Usando argumentos de simetría, escriba en términos de estas funciones de Green las funciones de Green en el interior de los siguientes recintos:

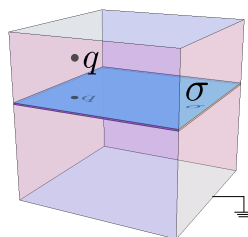


**Separación de variables en coordenadas cartesianas.**

6. Un cubo de lado  $a$  tiene sus tapas al potencial que muestra cada figura. Las tapas donde no se indica ningún valor del potencial están a tierra. Encontrar el potencial en el **interior** del cubo en cada caso.

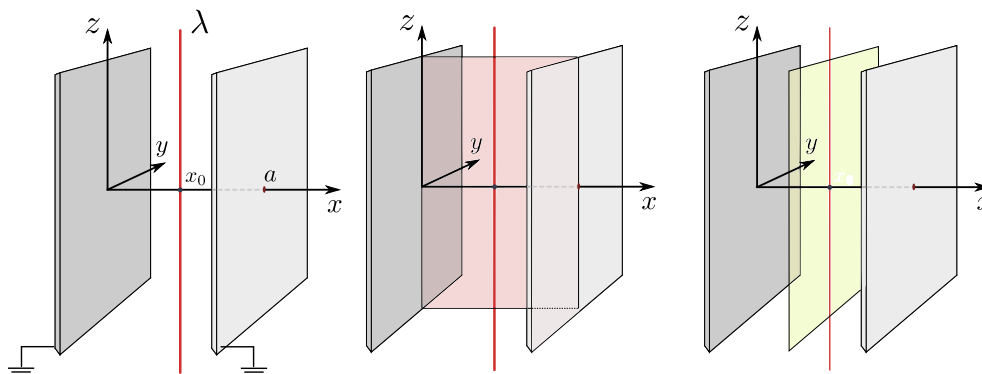


7. Los planos  $z = 0$  y  $z = a$  están a potenciales  $V_1(x, y)$  y  $V_2(x, y)$ . Hallar el potencial en todo el espacio.
8. Un cubo de lado  $a$  está conectado a tierra. En su interior hay un cuadrado con densidad superficial uniforme  $\sigma$  y una carga puntual  $q$ . Calcule el potencial **en todo el espacio**.



9. Un alambre con densidad de carga constante  $\lambda$  está equidistante a dos placas conductoras infinitas conectadas a tierra, como muestra la figura ( $x_0 = a/2$ ). Utilizando separación de variables, encuentre el potencial **en todo el espacio**. Para ello divida la región entre las placas de los siguientes modos:

- (a) Con un corte vertical perpendicular a los planos.
- (b) Con un corte vertical paralelo a los planos.
- (c)\* Compare las dos formas de la solución. ¿Se atreverá a demostrar la igualdad de las dos expresiones sin usar el teorema de unicidad?
- (d)\* Tanto la integral como la suma de Fourier que han aparecido al aplicar las dos separaciones pueden hacerse de manera explícita y la solución es una función simple. Encuentre esa función.



10. Calcular el potencial y el campo electrostático en todo punto del espacio producido por un cuadrado cargado con densidad uniforme  $\sigma$ . Puede asumirse que el cuadrado está sobre el plano  $xy$ , que su centro coincide con el origen y que sus lados están alineados con los ejes  $x$  e  $y$ .

11. (a) Encuentre por separación en cartesianas la función de Green de Dirichlet del espacio no acotado. Para eso, divida el espacio en dos regiones con un plano paralelo al plano  $xy$ ; la solución debe quedar escrita en la forma

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y')]} \phi(k_x, k_y) f_{k_x k_y}(z - z').$$

(b) Encuentre la función de Green de Dirichlet del espacio no acotado proponiendo para  $G$  un desarrollo de Fourier tridimensional,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d^3 \mathbf{p} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \phi(\mathbf{p}),$$

y resolviendo directamente la ecuación de Poisson,  $\nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ .

(c)\* Comparando las dos formas de la función de Green del espacio no acotado obtenidas en los ítems anteriores, encuentre la transformada de Fourier de la función  $f(z) = e^{-\kappa|z|}/\kappa$ .

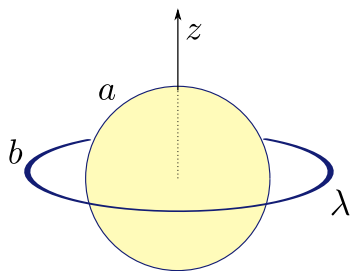
12. Utilizando el método de la función de Green, resuelva nuevamente: El problema 10., con la expresión obtenida en el problema 11.a, y con la del problema 11.b.

13. Encuentre la función de Green para el problema de Dirichlet en el interior de un cilindro semiinfinito de sección cuadrada de lado  $a$  (es decir,  $0 \leq x, y \leq a, 0 \leq z < \infty$ ).

14. Ídem al anterior pero para un cilindro cuadrado infinito (ahora  $-\infty < z < \infty$ ).

## Separación de variables en coordenadas esféricas.

15. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial  $V_1$  y la inferior a  $V_2$ . Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.
16. (a) Encontrar el potencial de una carga puntual  $q$  entre dos cáscaras esféricas conductoras, concéntricas y conectadas a tierra, de radios  $a$  y  $b$  respectivamente.
- (b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.
- (c) Observar qué sucede cuando se hace tender el radio de la esfera exterior a infinito ¿Cuánto valen las cargas totales inducidas en ese caso?
- (d) Resolver el problema en el caso en que los potenciales de las esferas se elevan a  $V_1$  y  $V_2$ . (Ver último problema de la guía 1).
- (e) Resolver el problema en el caso en que las esferas están aisladas y tienen una carga total  $Q_1$  y  $Q_2$ . (Ver último problema de la guía 1).
- (f)\* Mediante el método de imágenes, hallar la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región entre dos esferas concéntricas de radios  $a$  y  $b$ . Muestre que esta solución coincide con la del problema 16.(a). Sugerencia: es necesario usar una serie infinita de imágenes. Hallar primero relaciones de recurrencia para las ubicaciones y los módulos de las cargas imágenes; resolver esas relaciones y luego escribir la superposición adecuada en forma de suma infinita. Para comparar con el resultado del problema 16.(a), usar el desarrollo de la función  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  en armónicos esféricos y hacer la suma explícitamente.
17. Una esfera de radio  $a$  está a tierra. Concéntrico con ella hay un anillo de radio  $b > a$ , cargado uniformemente con carga total  $Q$ .

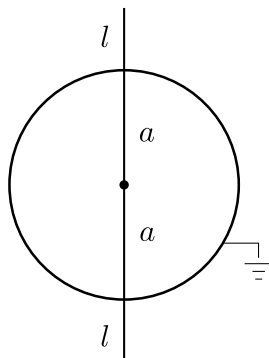


- (a) Calcular el potencial en todo punto del espacio usando el método de la función de Green.
- (b) Calcular el potencial sobre el eje perpendicular al plano del anillo, utilizando el método de imágenes. Luego, extender la solución para todos los puntos exteriores a la esfera mediante prolongación analítica (Jackson, sección 3.3, donde dice "Series (3.33), with its coefficients determined by the boundary..."). Comparar con el resultado del punto (a).
- (c) Calcular el potencial usando separación de variables y comparar con los resultados anteriores.
- (d) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre la esfera. ¿Qué tiene esto que ver con el método de imágenes?

(e) ¿Cómo resolvería el problema si la esfera estuviera aislada y descargada?

Fórmulas útiles:  $P_{2n+1}(0) = 0$ ,  $P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$ ,  $P_0(x) = 1$ ,  $P_l(1) = 1$ .

18. Una esfera de radio  $a$  está a tierra. Por el centro de la esfera pasa una línea de longitud  $d = 2(a + l)$  uniformemente cargada, como muestra la figura. Encontrar el potencial en todo el espacio.



### Separación de variables en coordenadas cilíndricas.

19. Un cilindro de radio  $a$  y altura  $h$  tiene su superficie lateral conectada a tierra, mientras que las tapas se mantienen a potenciales  $V$  y  $-V$ . Hallar el potencial en el interior del cilindro.
20. (a) Usando separación de variables en coordenadas cilíndricas, hallar el potencial y el campo electrostático producidos por un disco de radio  $a$  cargado con densidad uniforme  $\sigma$ .  
 (b) A través de límites adecuados, verificar que la expresión obtenida se reduce en un caso a la de una carga puntual, y en otro a la de un plano infinito.  
 (c) ¿El disco puede ser conductor?
21. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de un cilindro circular de radio  $a$  y longitud  $L$ , separando en regiones de las siguientes maneras:  
 (a) Cortando con un plano perpendicular al eje del cilindro.  
 (b) Cortando con un cilindro coaxial al cilindro original.
22. Ídem al problema anterior pero para un cilindro de longitud infinita. Encuentre también la función de Green para el problema externo utilizando el segundo tipo de corte. ¿Sabría cómo resolver el problema externo usando el primer tipo de corte?
23. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de una estructura con forma de cuarto de cilindro circular, infinito y de radio  $a$ , siguiendo estos dos caminos:  
 (a) Usando separación de variables en el cuarto de cilindro a partir de la ecuación para  $\nabla^2 \Phi$  en coordenadas cilíndricas y con condiciones de contorno adecuadas.  
 (b) Usando imágenes y la función de Green para el cilindro infinito obtenida en el problema anterior.  
 (c) Además del problema del cuarto de cilindro, que corresponde a un ángulo de  $\alpha = \pi/2$  entre las tapas planas laterales, ¿para qué otros valores  $\alpha$  puede resolverse el problema usando imágenes?

24. (a) Usando separación en coordenadas cilíndricas, calcular la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos planos infinitos, ubicados en  $z = 0$  y  $z = L$ .
- (b) Si se coloca una carga  $q$  a una altura  $z$  entre los planos, calcular las densidades de carga y las cargas totales inducidas sobre cada plano.
- (c)\* Observe que si bien la densidad superficial no tiene una expresión muy simple, el resultado para la carga total es llamativamente simple. La carga total sobre cada plano puede obtenerse de consideraciones más generales que no requieren calcular el potencial explícitamente. Lo que se usa es el llamado Teorema de Reciprocidad. Entre los problemas del capítulo 1 del Jackson figura este teorema y su aplicación al caso de los dos planos. En la tercera edición son los problemas 1.12 y 1.13. Quedan propuestos como problemas opcionales.