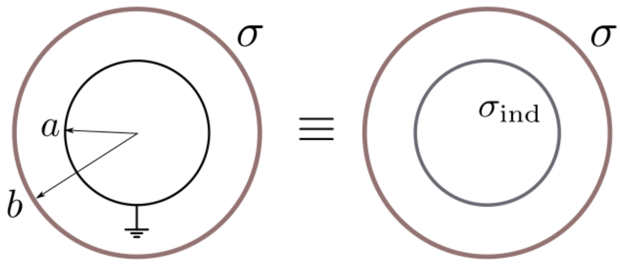
FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do Cuatrimestre de 2022

PRÁCTICA DEL 24/08:
GUÍA 1 - SUPERPOSICIÓN Y CONDICIONES DE CONTORNO

Problema 8

(a) *Calcular el potencial electrostático para todo punto del espacio producido por una esfera metálica a tierra de radio a rodeada por una cáscara esférica de radio b donde se deposita una densidad de carga uniforme σ.*



Problema 8 (a).

El conductor perfecto permitirá que se induzcan cargas sobre su superficie de manera que el potencial allí sea nulo (conductor a tierra). La simetría esférica del problema implica que la densidad de carga inducida σ_{ind} sobre la esfera de radio a debe ser uniforme. Vamos a pensar a esta densidad inducida como una incógnita y plantear el problema como la superposición de σ y σ_{ind}. La condición de contorno sobre la superficie $r = a$ va a determinar el valor de σ_{ind}.

Vimos que el potencial dado por las dos cáscaras esféricas es,

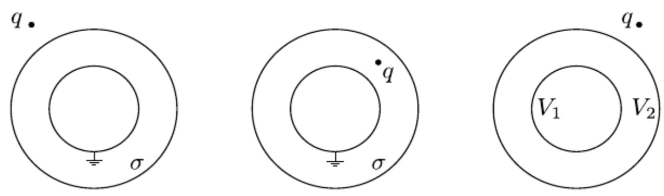
$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q_{\text{ind}}}{a} + \frac{Q}{b}, & \text{si } r \leqslant a \\ \frac{Q_{\text{ind}}}{r} + \frac{Q}{b}, & \text{si } a \leqslant r \leqslant b \\ \frac{Q_{\text{ind}}+Q}{r}, & \text{si } b \leqslant r, \end{cases} \tag{1}$$

donde $Q_{\text{ind}} = 4\pi a^2 \sigma_{\text{ind}}$ y $Q = 4\pi b^2 \sigma$. Finalmente, aplicando la condición de contorno del potencial en $r = a$,

$$\Phi(r = a) = 0\,, \tag{2}$$

obtenemos $Q_{\text{ind}} = -aQ/b$. Esta es una carga imagen asociada a la cáscara con carga total Q frente al conductor a tierra (el lunes que viene seguiremos estudiando este resultado).

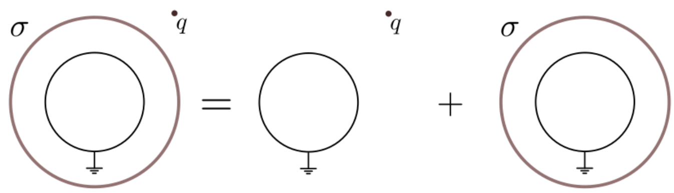
(b) *Suponiendo conocido el potencial producido por una carga frente a una esfera a tierra (Φ_q) y el resultado del ítem anterior, indicar cómo utilizar el principio de superposición en los siguientes casos:*



Problema 8 (b): 3 casos.

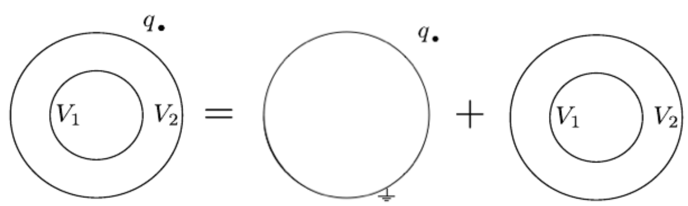
Al construir una solución por superposición de soluciones se debe satisfacer los siguiente: (i) En los contornos de cada región donde se ha fijado el valor del potencial de antemano, la suma de las soluciones debe tomar ese valor; (ii) En las regiones donde se han prescrito las densidades de carga, la suma de las densidades de carga que aporta cada término de la superposición tiene que dar la densidad original. De esta manera queda garantizado que la superposición tiene las mismas fuentes que había prescritas en cada región del problema original, y que satisface las mismas condiciones en los contornos.

El primer caso lo pensamos como la siguiente superposición,



donde la primer parte se da como conocida y la segunda es el inciso (a). En el segundo caso, la carga puntual se encuentra entre los radios a y b, y la superposición es análoga.

El tercer caso puede descomponerse como la suma $\Phi = \Phi_q + \tilde{\Phi}$



El potencial Φ_q es el de una carga puntual frente a un conductor a tierra de radio b, que se asume conocido (notar que $\Phi_q(r \leqslant b) = 0$). El término $\tilde{\Phi}$ es el potencial electrostático producido por dos cáscaras (conductoras) que se encuentran a potenciales fijos V_1 y V_2, respectivamente. El potencial $\tilde{\Phi}$ pueden asociarlo al de dos cáscaras, cada una con una distribución superficial de carga uniforme (como el que resolvimos en clase, y también usamos en (1)). Esto es,

$$\tilde{\Phi}(r) = \begin{cases} \frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{b}, & \text{si } r \leqslant a \\ \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{b}, & \text{si } a \leqslant r \leqslant b \\ \frac{Q_1+Q_2}{r}, & \text{si } b \leqslant r, \end{cases} \tag{3}$$

y pidiendo las condiciones en los contornos:

$$\tilde{\Phi}(r = a) = V_1 \tag{4}$$

$$\tilde{\Phi}(r = b) = V_2 \tag{5}$$

Queda para ustedes despejar para poner el resultado en términos de los potenciales V_1 y V_2 fijos en cada contorno esférico.

Otra forma de resolver el problema de las dos esferas de radios a y b a potencial V_1 y V_2 respectivamente, es el siguiente método: planteen la ecuación para $\tilde{\Phi}$ en cada una de las 3 regiones sin carga: i) $r < a$, ii) $a < r < b$, y iii) $b < r$; esto es

$$\nabla^2\tilde{\Phi} = 0\,. \tag{6}$$

El potencial satisface la ecuación de Laplace en cada región porque allí no hay fuentes. Sabemos que este problema es esféricamente simétrico, por lo que el potencial depende únicamente de la coordenada r, entonces

$$\nabla^2\tilde{\Phi}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial r}\right) = 0 \tag{7}$$

(en donde usamos la expresión del operador laplaciano en esféricas, descartando las partes con derivadas en las coordenadas angulares). De esto último se ve que la solución más general para $\nabla^2\tilde{\Phi}(r) = 0$, con $\tilde{\Phi}$ simétricamente esférico, es: $\tilde{\Phi}(r) = A + B/r$, donde A y B son constantes de integración. Entonces,

$$\tilde{\Phi}(r) = \begin{cases} A_1 + \frac{B_1}{r}, & \text{si } r \leqslant a \\ A_2 + \frac{B_2}{r}, & \text{si } a \leqslant r \leqslant b \\ A_3 + \frac{B_3}{r}, & \text{si } b \leqslant r, \end{cases} \tag{8}$$

(¿coincide con lo planteado en (3)? ¿Por qué?). Para terminar de resolver el problema en cada una de las 3 regiones hay que imponer las condiciones de contorno; el potencial no diverge en el origen, $\tilde{\Phi}(a) = V_1$, $\tilde{\Phi}(b) = V_2$ y $\tilde{\Phi}(\infty) = 0$. ¿Alcanzan las condiciones?