FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2022

GUÍA 2 - SEPARACIÓN DE VARIABLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS:

Breve introducción/ repaso de la teórica

Al aplicar separación de variables para un potencial electrostático que satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

en coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), se obtiene una solución de la forma

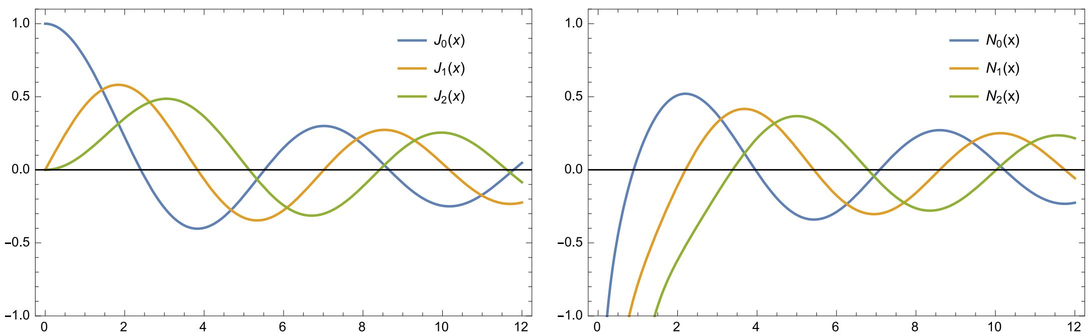
$$\Phi(\rho, \varphi, z) \sim Q(\varphi) Z(z) R(\rho)$$

donde

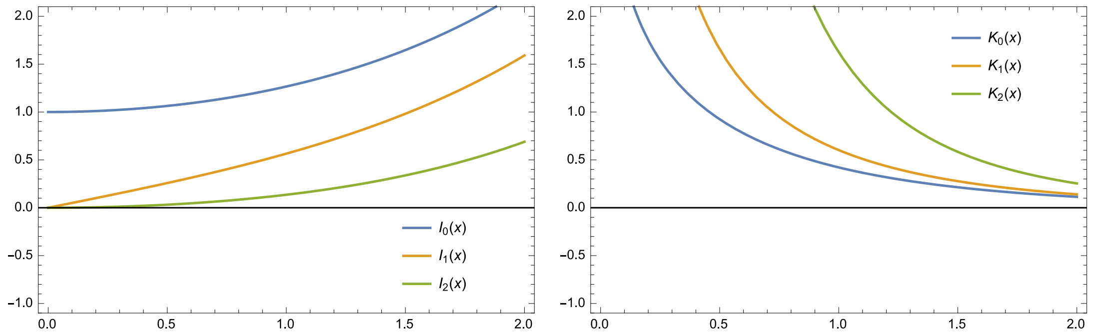
$$\begin{aligned} Q''(\varphi) &= -\beta\, Q(\varphi) \\ Z''(z) &= \lambda\, Z(z) \\ R''(\rho) + R'(\rho)/\rho &= \left(\beta/\rho^2 - \lambda\,\right) R(\rho) \end{aligned}$$

Las posibles soluciones para cada función aparecen resumidas en la siguiente tabla:

λ	β	$Q(\varphi)$	$Z(z)$	$R(\rho)$
k^2	0	$1, \varphi$	$e^{\pm kz}$	$J_\nu(k\rho), N_\nu(k\rho)$
	ν^2	$e^{\pm i\nu\varphi}$		
0	0	$1, \varphi$	$1, z$	$1, \ln(\rho)$
	ν^2	$e^{\pm i\nu\varphi}$		$\rho^{\pm\nu}$
$-k^2$	0	$1, \varphi$	$e^{\pm ikz}$	$I_\nu(k\rho), K_\nu(k\rho)$
	ν^2	$e^{\pm i\nu\varphi}$		



Funciones de Bessel de primera especie $J_\nu(x)$ y de segunda especie $N_\nu(x)$, para $\nu = 0, 1, 2$.



Funciones de Bessel modificadas $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$, para $\nu = 0, 1, 2$.

Coordenadas, bases y etiquetas:

Para la solución mas general siempre vamos a usar **base sobre la dirección angular** $\varphi \in [0, 2\pi)$; la base trigonométrica $\{e^{\pm i\nu\varphi}\}$ con $\nu \in \mathbb{N}_0$, dadas por la condición de periodicidad.*

- Caso $\lambda = k^2 > 0$: **Base en dirección radial** con condiciones de contorno triviales. Para cada ν, las funciones $\{J_\nu(k\rho), N_\nu(k\rho)\}$ son independientes y forman base en:

  un intervalo finito $\quad \rho \in [0; a] \quad$ con $\quad k \equiv k_{\nu n} = \chi_{\nu n}/a$
  un intervalo infinito $\quad \rho \in [0; \infty) \quad$ con $\quad k \in [0; \infty)$

  donde $\{\chi_{\nu n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ son las infinitas raíces de la función de Bessel $J_\nu(x)$. Para las funciones $Z(z)$ quedan exponenciales reales (o senos y cosenos hiperbólicos). Explícitamente, el potencial se escribe:

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\varphi} \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} J_\nu(k_{\nu n}\rho) \left[\tilde{A}_{\nu n} e^{-k_{\nu n} z} + \tilde{B}_{\nu n} e^{k_{\nu n} z}\right] \text{ si } \rho \in [0; a] \\ \displaystyle\int_0^{\infty} dk J_\nu(k\rho) \left[\tilde{A}_\nu(k)\, e^{-kz} + \tilde{B}_\nu(k)\, e^{kz}\right] \text{ si } \rho \in [0; \infty) \end{cases}$$

  o, escrito con base y coeficientes reales;

$$\Phi(0 \leqslant \rho \leqslant a, \varphi, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [A_\nu \sin(\nu\varphi) + B_\nu \cos(\nu\varphi)] \sum_{n=1}^{\infty} J_\nu(k_{\nu n}\rho) \left[C_{\nu n} e^{-k_{\nu n} z} + D_{\nu n} e^{k_{\nu n} z}\right]$$

$$\Phi(0 \leqslant \rho < \infty, \varphi, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [A_\nu \sin(\nu\varphi) + B_\nu \cos(\nu\varphi)] \int_0^{\infty} dk\, J_\nu(k\rho) \left[C_\nu(k) e^{-kz} + D_\nu(k) e^{kz}\right] .$$

- Caso $\lambda = -k^2 < 0$: **Base en dirección** z. Se usan trigonométricas $\{e^{\pm ikz}\}$ para formar base en:

  un intervalo finito en z con $\quad k \equiv k_n \quad$ discretos
  un intervalo infinito en z con $\quad k \in [0; \infty) \quad$ continuo

  Para la parte radial $R(\rho)$ quedan las funciones de Bessel modificadas $\{I_\nu(k\rho), K_\nu(k\rho)\}$. Explícitamente, el potencial se escribe:

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\varphi} \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n z} \left[\tilde{A}_{\nu n} I_\nu(|k_n|\rho) + \tilde{B}_{\nu n} K_\nu(|k_n|\rho)\right] \;:\; z \text{ en intervalo finito} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikz} \left[\tilde{A}_\nu(k)\, I_\nu(|k|\rho) + \tilde{B}_\nu(k) K_\nu(|k|\rho)\right] \;:\; z \text{ en intervalo infinito} \end{cases}$$

---

* *La base en dirección φ cambia en un recinto con un déficit de ángulo.*

o, escrito con base y coeficientes reales, podemos elegir:

$$\Phi(\rho,\varphi,z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[A_\nu\sin(\nu\varphi)+B_\nu\cos(\nu\varphi)\right]\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left[k_n(z_n-z)\right]}^{z\text{ en intervalo finito}}\left\{C_{\nu n}I_\nu(k_n\rho)+D_{\nu n}K_\nu(k_n\rho)\right\}$$

$$\Phi(\rho,\varphi,z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[A_\nu\sin(\nu\varphi)+B_\nu\cos(\nu\varphi)\right]\overbrace{\int_0^\infty dk\cos\left[k(\zeta(k)-z)\right]}^{z\text{ en intervalo infinito}}\left\{C_\nu(k)I_\nu(k\rho)+D_\nu(k)K_\nu(k\rho)\right\}$$

- Caso $\lambda=0$: sólo base en dirección φ, queda $Z(z)=A+Bz$, y en dirección radial el conjunto de soluciones es $\{\ln(\rho),\rho^{\pm\nu}\}$. Esto podría utilizarse en un problema con simetría de traslación en z; Por ejemplo, sabemos que el potencial de un alambre infinito con densidad lineal uniforme es $\Phi\sim\ln(\rho/r_0)$.

Ortogonalidad de las funciones de Bessel J_ν:

$$\int_0^a d\rho\,\rho\,J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a)J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)=\frac{a^2}{2}\left[J_{|\nu|+1}(x_{\nu n})\right]^2\delta_{nn'}$$

$$\int_0^\infty d\rho\,\rho\,J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho)=\frac{\delta(k-k')}{k}$$

Propiedades:

$$J_0(0)=1\,,\quad J_{\nu\neq0}(0)=0\,,\quad x\ll1:\quad J_\nu(x)\sim\tfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\tfrac{x}{2}\right)^\nu\quad x\gg\nu^2:\quad J_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_\nu(x\to0)\to\infty\qquad \nu\in\mathbb{N}:\quad J_{-\nu}(x)=(-1)^\nu J_\nu(x)\,,\qquad \int x^\nu J_{\nu-1}(x)=x^\nu J_\nu(x)$$

Fórmulas de recurrencia:

$$\Omega_{\nu-1}(x)+\Omega_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}\Omega_\nu(x)$$

$$\Omega_{\nu-1}(x)-\Omega_{\nu+1}(x)=2\frac{d\Omega_\nu}{dx}(x)$$

Donde Ω_ν representa a cualquiera de las funciones J_ν, N_ν, $H_\nu^{(1)}=J_\nu+iN_\nu$ y $H_\nu^{(2)}=J_\nu-iN_\nu$.

Para las modificadas:

$$I_0(0)=1\,,\ I_{\nu>0}(0)=0\,,\ I_\nu(x\to\infty)\to\infty\qquad K_\nu(x\to0)\to\infty\,,\ K_\nu(x\to\infty)=0$$

$$I_{-\nu}=I_\nu\,,\ I_\nu(-x)=(-1)^\nu I_\nu(x)\qquad K_{-\nu}=K_\nu$$

Wronskiano: $W[K_\nu,I_\nu](x)\equiv K_\nu(x)I'_\nu(x)-K'_\nu(x)I_\nu(x)=\frac{1}{x}$

Sobre la delta de Dirac $\delta(\rho-\rho')$ en cilíndricas, notar que si $\rho'=0$, vale:

$$\int_0^{\epsilon>0}d\rho\,\delta(\rho)=1$$