FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2022

GUÍA 5 - ONDAS PLANAS EN CONDUCTORES

Problema 6: Reflexión y transmisión en un buen conductor

Considerar el problema de incidencia de una onda plana sobre una interfase vacío−conductor óhmico. El conductor ocupa el semiespacio $z > 0$. Asumir que $\epsilon' = \mu' = 1$ en todo el espacio, y que la conductividad σ del conductor es independiente de la frecuencia. La onda incide desde el vacío con un ángulo θ.

(a) *Encontrar la relación de dispersión $k(\omega)$ en el conductor.*

Las ecuaciones de Maxwell dentro de un conductor óhmico donde $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, y con $\mu' = \epsilon' = 1$, son

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{1}$$

Vamos a considerar soluciones de ondas planas en el interior del conductor*

$$\mathbf{E} = E\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{v}_E\,, \quad \mathbf{B} = B\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{v}_B\,, \qquad (\hat{v}\text{: versores})$$

Reemplazando en las dos primeras ecuaciones se tiene que: $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{B}$, mientras que de las otras dos se obtiene

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}\,, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c}\left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E}\,.$$

Tomando $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})$ y usando la última para deshacerse de $\mathbf{B}$, llegamos a que el producto escalar del vector de onda $\mathbf{k}$ consigo mismo es

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} \equiv k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[1 + 2i\left(\frac{c}{\omega\delta}\right)^2\right]\,, \tag{2}$$

donde definimos el parámetro *longitud de penetración* (o *espesor pelicular*) en el conductor como

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}\,, \tag{3}$$

y el vector número de onda complejo

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_f + i\,\mathbf{k}_a \quad ; \quad \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_a \in \mathbb{R}^3$$

El índice de refracción complejo puede leerse de la definición de la relación de dispersión compleja

$$k(\omega) = n'\,\frac{\omega}{c} \qquad \Longrightarrow \quad n' = \left[1 + 2i\left(\frac{c}{\omega\delta}\right)^2\right]^{1/2}\,. \tag{4}$$

La definición de buen conductor es

$$\delta \ll \lambda_0 = c/\omega$$

*usaremos notación compleja, los campos físicos se obtienen de tomar $\mathbb{R}\mathrm{e}[\,\dots]$ o $\mathbb{I}m[\,\dots]$]

o, como indica el enunciado, considerar

$$\omega \ll \sigma\,.$$

Esto permite despreciar el término de corrientes de desplazamiento frente al de corrientes en un muy buen conductor, en las ecuaciones de Maxwell. Esta aproximación corresponde a prescindir del término real en la ecuación (2), es decir

$$k^2 \simeq \frac{2i}{\delta^2}\,,$$

tal que la relación de dispersión bajo la aproximación de buen conductor es

$$k(\omega) \simeq \frac{1+i}{\delta}\,, \tag{5}$$

y el índice de refracción para un buen conductor queda

$$n' \simeq \frac{c}{\omega\delta}(1+i)\,. \tag{6}$$

(b) *Encontrar el* **vector** *de onda en el conductor, eligiendo la solución que es apropiada para la región* $0 < z$. *Escribir explícitamente la parte real y la parte imaginaria del vector de onda. ¿En qué dirección se propaga la onda transmitida? ¿En qué dirección se atenúa? ¿Cuál es la longitud típica de atenuación? ¿Qué pasa con la dirección de propagación a medida que el espesor pelicular* $\delta \to 0$*?*

La relación de dispersión compleja, ya sea (4) o su versión aproximada (5), implica un vector número de onda complejo. Podemos anticipar que la parte real $\mathbf{k}$ estará relacionada con la propagación de la fase de la onda monocromática, mientras que la parte imaginaria posee la información sobre la atenuación de la onda.

Para ver en detalle lo anterior ubicamos al conductoren el espacio semi infinito con $z > 0$, la incidente se propaga desde los $z < 0$, en vacío, con número de onda $k_0 = \omega/c$ y ángulo de incidencia θ. Planteamos el problema para el caso Trasverso Eléctrico. Los campos (TE) incidente y reflejado son:

$$\mathbf{E}_0 = E_0\, e^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{x}\,, \quad \mathbf{E}_r = E_r\, e^{i(\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{x}\,,$$

y el transmitido hacia el interior del conductor es

$$\mathbf{E} = E\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{x}\,,$$

en donde los vectores de onda quedan definidos de la siguiente manera

$$\mathbf{k}_0 = k_{0y}\,\hat{y} + k_{0z}\,\hat{z}\,, \quad \mathbf{k}_r = k_{ry}\,\hat{y} + k_{rz}\,\hat{z}\,, \quad \mathbf{k} = k_y\,\hat{y} + k_z\,\hat{z}\,. \tag{7}$$

La ley de Snell establece que

$$k_{0y} = k_{ry} = k_y$$

por lo que k_y es real. Equivalentemente, podemos escribir

$$k_0 \sin\theta = k \sin\theta'\,,$$

el ángulo de transmisión θ' queda definido a partir del valor de $\sin\theta'$, en función de θ, k_0 y k, que será complejo ya que $k \in \mathbb{C}$.

Por otro lado, la componente k_z de del vector $\mathbf{k}$ será compleja para poder satisfacer la relación de dispersión dada por k^2 dentro del conductor. Entonces escribimos

$$k_z = k' + ik'' ,$$

de modo que al considerar el producto escalar de $\mathbf{k}$ consigo mismo, ec. (2), tenemos

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (k_0 \sin\theta)^2 + k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' . \tag{8}$$

Igualando las partes reales e imaginarias de la expresión anterior, y luego de resolver una cuártica, se obtiene

$$\begin{aligned} k' &= \frac{1}{\delta}\sqrt{(1+\beta^2)^{1/2}+\beta} \\ k'' &= \frac{1}{\delta}\sqrt{(1+\beta^2)^{1/2}-\beta} \end{aligned} \quad ; \quad \text{donde } \beta = \frac{\delta^2 k_0^2 \cos^2\theta}{2}$$

Considerando la aproximación de un buen conductor, $\beta \ll 1$, el orden dominante es

$$\begin{aligned} k' &\simeq \delta^{-1} \\ k'' &\simeq \delta^{-1} \end{aligned} \tag{9}$$

La solución de (8) para las componentes del número de onda satisface las ecuaciones de Maxwell dentro del conductor y las condiciones de contorno para la onda transmitida con

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_f + i\,\mathbf{k}_a \qquad \begin{aligned} \mathbf{k}_f &= k_y\,\hat{y} + k'\,\hat{z} \\ \mathbf{k}_a &= k''\,\hat{z} \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E\, e^{-\mathbf{k}_a\cdot\mathbf{r}}\, e^{i(\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{x} \\ &= E\, e^{-z\,k''} e^{i(y\,k_o \sin\theta + z\,k' - \omega t)}\,\hat{x}\,; \end{aligned}$$

- $k' \simeq \delta^{-1} > 0$ es la parte real de la componente k_z y determina que la velocidad de fase en esa dirección sea en sentido de $+\hat{z}$, es decir, hacia el interior del conductor.

- $k'' \simeq \delta^{-1}$ produce una atenuación del campo hacia los z positivos en una longitud característica δ. Las superficies de amplitud constante quedan dadas por: $zk'' = cte$, esto es; los planos de amplitud constante son paralelos a la interfase.

- Las superficies de fase constante del campo eléctrico son los planos: $y\,k_o \sin\theta + z\,k' = cte$. La dirección de propagación es perpendicular a los planos de fase constante y el ángulo de refracción *real* ψ de la onda transmitida respecto a la normal a la interfase $\hat{\perp} = \hat{z}$, puede definirse a partir de

  $$\sin\psi = \frac{k_y}{(k_y^2 + k'^2)^{1/2}} \simeq \delta k_0 \sin\theta\,.$$

  A mayor conductividad o menor frecuencia el ángulo $\psi \to 0$ y la propagación en el conductor queda en la dirección normal a la superficie. Para un metal como el cobre $\sigma \simeq 5\times 10^{17} s^{-1}$, a una frecuencia baja de 60Hz se tiene un espesor pelicular $\delta \simeq 1cm$ y $\psi \simeq (10^{-7})^{\circ}$. Para materiales no metálicos con menor conductividad, el ángulo ψ también puede ser aproximadamente cero; en agua de mar $\sigma \simeq 5\times 10^{10} s^{-1}$, y a una frecuencia de 100kHz se obtiene $\delta_{agua}^{100kHz} \simeq 70cm$ y $\psi_{agua}^{100kHz} \simeq 0,1^{\circ}$.

(c) *Encontrar las amplitudes (complejas) de las ondas reflejadas y transmitidas. Estudiar el límite $\delta \to 0$. Considerar los casos TE y TM.*

(seguimos sólo con el caso TE)
De la continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético en la interfase vacío–buen conductor (ubicada en $z = 0$), con permeabilidades $\mu = 1$ en todo el espacio, se tiene el sistema

$$E_0 + E_r = E\,, \qquad k_{0z}\,E_0 + k_{rz}\,E_r = k_z\,E.$$

Reemplazando $k_{rz} = -k_{0z}$, se puede escribir los coeficientes de reflexión y transmisión en término de las componentes de los números de onda como[†]

$$R = \frac{E_r}{E_0} = \frac{k_{0z} - k_z}{k_{0z} + k_z}\,, \quad T = \frac{E}{E_0} = \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_z}\,. \tag{10}$$

En la interfase vacío–buen conductor tenemos $k_{0z} = k_0 \cos\theta$ y $k_z \simeq (1 + i)/\delta$, entonces se obtiene

$$R \simeq -1 + (1 - i)k_0\delta\cos\theta\,, \tag{11}$$

donde se retuvieron términos a primer orden en $k_0\delta \sim (\omega/\sigma)^{1/2} \gg (\omega/\sigma)$. Análogamente, el coeficiente de transmisión queda

$$T \simeq (1 - i)\delta k_0 \cos\theta\,. \tag{12}$$

Observaciones:

(i) Las amplitudes reflejada y transmitida son casi independientes del ángulo de incidencia en la mayoría de los metales a frecuencias menores al THz.

(ii) En un conductor ideal, $\delta \to 0$, no hay onda transmitida: Los campos no se propagan al interior del conductor, el campo eléctrico exterior es normal al conductor y se produce una corriente superficial sobre la interfase (debido a que el espesor pelicular δ tiende a cero) encargada de conservar la componente tangencial de $\mathbf{H}$ sobre la interfase.

(d) *Demostrar que para un buen conductor el coeficiente de reflexión es aproximadamente $r \approx 1 - 2\delta\omega/c$.*

El **coeficiente de intensidad reflejada** r se define como el cociente entre el flujo de la energía de la onda reflejada y de la incidente, entonces se tiene que

$$r = \frac{\mathbf{E_r}\cdot\mathbf{E_r^*}}{\mathbf{E_0}\cdot\mathbf{E_0^*}} = \frac{E_r E_r^*}{E_0 E_0^*} = RR^* = |R|^2 \approx 1 - 2\delta k_0\cos\theta\,. \tag{13}$$

Los metales son buenos espejos pues allí suele ser $\delta \to 0$ y $r \to 1$. Para incidencia normal se obtiene el resultado que pide el ítem (d) de la guía.

[†]Chequear estas expresiones a partir de los coeficientes de Fresnel TE ya calculados.

Ejercicios propuestos:

1) Mostrar que los campos reales $\mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbf{E}]$ y $\mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbf{B}]$ no forman terna derecha con $\mathbf{k}_f$.

2) ¿En qué dirección se propaga la energía instantánea trasmitida dentro del conductor?

3) Calcular el promedio temporal (en un período) del vector de Poynting dentro del conductor. ¿En qué dirección viaja la energía promediada?

4) Estudiar el balance de energía promedio dentro del conductor: Tomar una columna de área unidad que se extiende desde la superficie del conductor hasta una distancia z dentro de él, usando la aproximación de buen conductor. Esto involucra el cálculo del vector de Poynting y el de la energía disipada por efecto Joule dentro del conductor:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{V}} d^3r \; u\right) + \oint_{\partial \mathrm{V}} d^2r \; \mathbf{n}\cdot\mathbf{S} = -\int_{\mathrm{V}} d^3r \; \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$$

donde

$$u = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

(El volumen V sería un cilindro de sección unidad A y de longitud z).