FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2022

GUÍA 4: LEYES DE CONSERVACIÓN, FENÓMENOS ESTACIONARIOS Y CUASIESTACIONARIOS

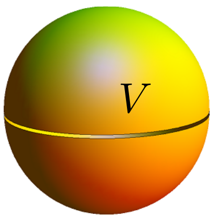
Tensor de Maxwell.

1. Usar el tensor de Maxwell para encontrar:

   (a) La fuerza entre dos esferas de radios a y b, con cargas q_1 y q_2 y separadas una distancia $d > a + b$.

   (b) La fuerza por unidad de longitud entre dos cilindros paralelos infinitos de radios a y b, separados una distancia $d > a + b$, y por los que circulan corrientes uniformes I_1 e I_2.

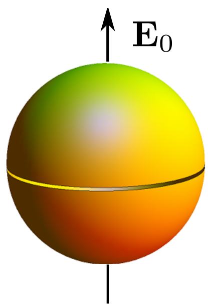
2. Una esfera conductora de radio a está a potencial V. Usando el tensor de Maxwell, calcular la fuerza que tiende a separar cualquier par de hemisferios. Comparar con el resultado obtenido a partir de la fuerza de Lorentz. Si la esfera está aislada y tiene carga Q: sin hacer ningún otro cálculo, ¿cuál es la fuerza que tiende a separar sus hemisferios?



3. Una esfera conductora descargada tiene radio a y está en un campo eléctrico externo uniforme $\mathbf{E}_0$.

   (a) Calcular la fuerza que tiende a separar o a unir los hemisferios según la dirección de $\mathbf{E}_0$.

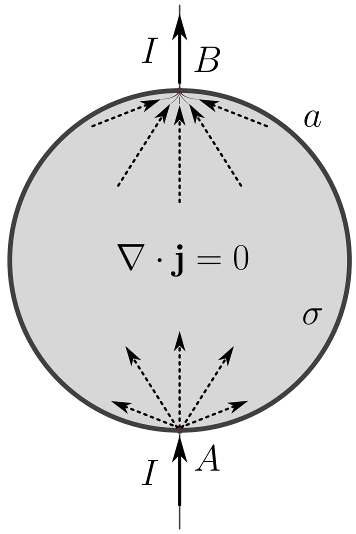
   (b) Calcular la fuerza si ahora la esfera tiene carga neta Q ¿Puede obtenerse este resultado sumando a la fuerza obtenida en el ítem anterior la fuerza calculada en la segunda parte del problema 2?



4. Calcular la fuerza por unidad de área sobre las paredes de un cilindro infinito de radio a que transporta una corriente superficial uniforme paralela a su eje.

Fenómenos estacionarios, cuasiestacionarios y transitorios.

5. Una esfera tiene radio a y conductividad σ. Una corriente I ingresa perpendicular a la esfera por un punto A, y egresa por un punto B diametralmente opuesto. El régimen es **estacionario**. Encontrar el potencial dentro de la esfera.



Si resuelve el problema usando separación de variables en coordenadas esféricas, obtendrá una suma infinita. Esa suma puede resolverse explícitamente operando a partir de los desarrollos

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2 \mp 2xy}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(y)\,(\pm x)^l.$$

Referencias: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, §**21** en la versión en inglés, o §**20** en la versión española; en ambos casos, Problema 2 al final de la sección, resuelto por medios esotéricos.

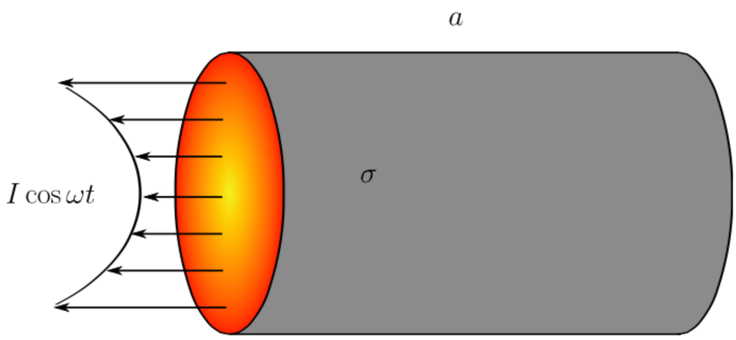
6. Por un conductor cilíndrico, macizo, de radio a, $\mu = \epsilon = 1$ y conductividad σ circula una corriente alterna del tipo $I = I_0 \cos(\omega t)$. La distribución de la corriente dentro del conductor **no** puede asumirse conocida, sino que debe encontrarse de manera consistente con las ecuaciones de Maxwell. Bajo la **aproximación cuasiestacionaria** (i.e. despreciar el término de corriente de desplazamiento), calcular:

   (a) Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en el interior del conductor.

   (b) Estudie los casos límites de la distribución de $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ cuando $\delta/a \gg 1$ y $\delta/a \ll 1$, donde δ es el espesor pelicular o "skin depth".

   (c) Encontrar la potencia media disipada y la resistencia efectiva en los casos límites, y, en el caso del espesor pelicular mucho menor que a, la corriente superficial efectiva.

   (d)* Calcular numéricamente y graficar la resistencia vs. la frecuencia en el caso general.



Referencia: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, §**60** [The skin effect] en la versión en inglés; §**46**, [Efecto pelicular] en la edición española de ed. Reverté.

7. Una cáscara esférica maciza tiene radio interior a y exterior b, y está caracterizada por una conductividad σ, una constante dieléctrica ϵ y una permeabilidad μ. Sobre la cara interior de la cáscara se ha depositado una densidad superficial de carga uniforme Σ. Si a $t = 0$ se permite que el sistema evolucione:

   (a) Usando argumentos de simetría, ¿cuánto vale $\mathbf{B}$ en todo el espacio y para todo t? ¿Qué simetría tiene el campo eléctrico?

   (b) Teniendo en cuenta lo anterior, encontrar la forma que adoptan las ecuaciones de Maxwell dentro y fuera del conductor.

   (c) Encontrar el campo eléctrico, la densidad de corriente y la densidad de carga (superficial y de volumen) en función del tiempo.

   (d) Mostrar que se cumple el balance de energía según el teorema de Poynting,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{V}} d^3\mathbf{r}\; u\right) + \int_{\mathrm{V}} d^3\mathbf{r}\; \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = -\oint_{\mathrm{S}} d^2r\; \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,,$$

   con $u = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)$, $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}$, y donde el volumen V es un volumen de cascarón esférico que encierra a la cáscara esférica. En particular, encontrar la evolución de la energía de los campos en función del tiempo y demostrar que la variación de energía entre $t = 0$ y $t = \infty$ es igual a la energía disipada por efecto Joule.