Cuasi-estacionario

Repaso

Consideremos una corriente que varia en el tiempo

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$$

y circula por un conductor cilíndrico con algún tamaño característico a (radio). Dado el número de onda y la frecuencia del campo electromagnético

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

lo que se pide es que el tamaño característico sea chico comparado con la longitud de onda del campo electromagnético

$$\lambda \gg a$$

esto es la aproximación cuasi-estacionaria. De modo que cerca de la distribución se puede considerar que la variación característica del campo es muy chica, esto queda más claro si se reescribe la aproximación de la forma

$$\omega \ll \frac{c}{a}$$

donde $\frac{c}{a} = \tau$ es el tiempo que tarda una señal en ir desde un extremo a otro del conductor. Entonces lo que se pide es que la variación del campo sea lento comparado con esta cantidad.

Como es un conductor podemos hacer uso de la ley de Ohm $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Sin aproximación cuasi-estacionaria las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho = 0 \quad \text{(En conductor)} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \underbrace{\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}}_{\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2}$$

asumamos que si tengo una fuente que varia en el tiempo como $e^{i\omega t}$ entonces los campos van a tener esa misma dependencia.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{i\omega t}.$$

Al resolver se plantean exponenciales complejas y las amplitudes al final en general van a quedar complejas, al final entonces se debe tomar la parte real.

Escribo nuevamente las ecuaciones con las formas de los campos propuestas, simplificando las partes temporales. La segunda parte de la aproximación cuasiestacionaria en conductores es considerar $\sigma \gg \omega$. Entonces, el último termino ($\propto \omega$) asociado a la corriente de desplazamiento, en la ecuación del rotor de $\mathbf{B}$, se desprecia frente al primero ($\propto \sigma$).

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{B}(\mathbf{r}) \qquad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \cancel{\frac{i\omega}{c}\mathbf{E}(\mathbf{r})} \tag{4}$$

Considerar $\sigma \gg \omega$ no es algo que solo se aplica a la aproximación cuasi-estacionaria es una aproximación que se aplica para buenos conductores en general y las frecuencias que se usan en la industria

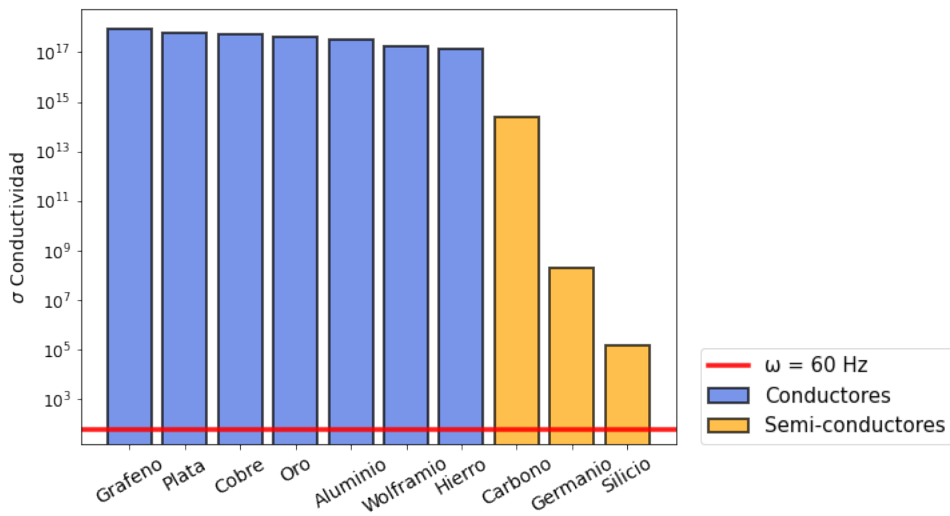


Figura 1: La linea roja es la frecuencia de la corriente alterna domiciliaria de Argentina.

Por último un comentario más sobre esta aproximación, dado que en clase preguntaron ¿cómo puede comparar σ y ω ? si las unidades no son las mismas. Aunque la voz de Juan nos haya tranquilizado al decirnos que "σ tiene unidades de $\frac{1}{s}$", vale la pena revisar la conversión

$$[\sigma_{CGS}] = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sigma_{SI}\right] = \frac{1}{s}$$

a la que llegamos teniendo en cuenta las unidades de las cantidades involucradas $[\sigma] = \frac{1}{\Omega m} = \frac{s\ C^2}{kg\ m^3}$ y $[\epsilon_0] = s^2C^2/(kg\ m^3)$.

Problema 6

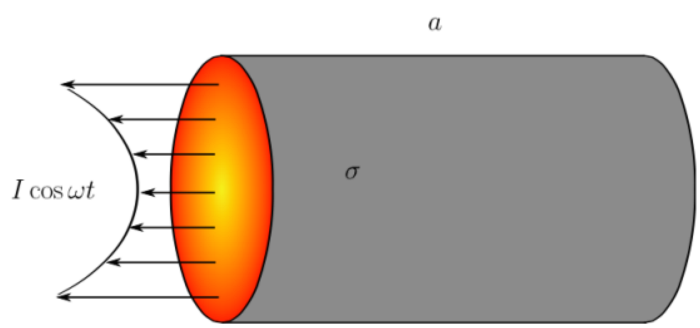
Por un conductor cilíndrico, macizo, de radio a, $\mu = \epsilon = 1$ y conductividad σ circula una corriente alterna del tipo $I = I_0 \cos(\omega t)$. La distribución de la corriente dentro del *conductor* ***no*** *puede asumirse conocida, sino que debe encontrarse de manera consistente con las ecuaciones de Maxwell. Bajo la* ***aproximación cuasiestacionaria*** *(i.e. despreciar el término de corriente de desplazamiento), calcular:*

a) *Los campos* $\boldsymbol{E}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *en el interior del conductor.*

b) *Estudie los casos límites de la distribución de* $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ *cuando* $\delta/a \gg 1$ *y* $\delta/a \ll 1$ *, donde* δ *es el espesor pelicular o "skin depth".*

c) *Encontrar la potencia media disipada y la resistencia efectiva en los casos límites, y, en el caso del espesor pelicular mucho menor que a, la corriente superficial efectiva.*

d) $*$ *Calcular numéricamente y graficar la resistencia vs. la frecuencia en el caso general.*



Referencia: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, §**60** [The skin effect] en la versión en inglés; §**46**, [Efecto pelicular] en la edición española de ed. Reverté.

Resolución

a) Para empezar tomo el rotor de esta ecuación

$$\nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{B} \right) \tag{5}$$

uso la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$ y esto lo aplico a la ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \underbrace{\nabla \times \mathbf{B}}_{\frac{4\pi}{c}\sigma \mathbf{E}} \tag{6}$$

la ecuación que se obtiene se denomina de difusión

$$\nabla^2 \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0 \tag{7}$$

donde se definió

$$k^2 = \frac{i4\pi\sigma\omega}{c^2}.$$

Y hasta acá solo use que el sistema es un conductor y que no hay distribuciones de carga. Ahora, voy a aclarar que mi sistema es un cilindro infinito usando coordenadas cilíndricas, donde el eje z va a pasar por el eje longitudinal del cilindro.

¿Se puede decir algo de la dependencia del campo eléctrico y de su dirección?

- Los campos solo pueden depender de ρ, por simetría de rotación φ y traslación en z.
- Como $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ no puede haber componente en ρ, el campo debe ser regular en el origen.
- Por simetria de reflexión o $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ no hay componente en dirección $\hat{\varphi}$.
- Como $\mathbf{E} \propto \mathbf{J}$ entonces, como no hay cargas el campo eléctrico apunta en $\hat{\mathbf{z}}$.

entonces campo eléctrico por estas simetrías apunta en z y depende de la coordenada radial $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(\rho)e^{i\omega t}\hat{\mathbf{z}}$.

La parte radial del laplaciano en cilíndricas es

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial E}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial^2 E}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E}{\partial \rho} \tag{8}$$

la ecuación es una de Bessel de orden cero

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E}{\partial \rho} + k^2 E = 0 \tag{9}$$

La solución es $E = AJ_0(k\rho)$, donde para encontrar el valor de A usamos que

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho\rho\mathbf{j} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho\ \rho\ \sigma E = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho\ \rho\ \sigma A J_0(k\rho) = 2\pi\sigma A\frac{a}{k}J_1(ka) \end{aligned} \tag{10}$$

entonces obtengo $A = \frac{I_0 k}{a 2\pi\sigma}\frac{1}{J_1(ka)}$, entonces el campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = \frac{I_0 k}{2\pi\sigma a}\frac{J_0(k\rho)}{J_1(ka)}\hat{\mathbf{z}} \tag{11}$$

Para el campo magnético $\mathbf{B}$ podemos usar, los mismos argumentos y derivar su expresión en forma análoga. También podemos usar la ecuación de Maxwell del rotor de $\mathbf{E}$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{B}$$

de modo que el rotor de 11 es

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_\rho E(\rho)\hat{\varphi} = Ae^{i\omega t}kJ_1(k\rho)\hat{\varphi} = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \frac{ic}{\omega}\frac{I_0 k^2}{2\pi\sigma a}\frac{J_1(k\rho)}{J_1(ka)}e^{i\omega t}\hat{\varphi}$$

donde se usó que $\partial_\rho J_0(k\rho) = kJ_1(k\rho)$.

b) La distribución de corriente es por la ley de Ohm

$$\mathbf{j} = \frac{I_0 k}{a2\pi}\frac{J_0(k\rho)}{J_1(ka)}\hat{\mathbf{z}} \tag{12}$$

De la definición de $k^2 = \frac{i4\pi\sigma\omega}{c^2} \Rightarrow k = \sqrt{2i}\sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c^2}} = \frac{1+i}{\delta}$ podemos hacer otra definición de la distancia de penetración

$$\delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega}}.$$

- Caso bajas frecuencias $\frac{\delta}{a} \gg 1$ ó $\left(\frac{\delta}{\rho} \gg 1\right)$. ¿Qué limite es este?

$$\frac{\delta}{a} = \frac{1+i}{ka} \gg 1 \Rightarrow ka \ll 1$$

Entonces definiendo $x = ka$ ó $x = k\rho$ en las funciones de Bessel $J_0(x)$ y $J_1(x)$ los desarrollos de estas funciones cerca de $x = 0$ son

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4} \qquad\qquad J_1 \approx \frac{x}{2}$$

de modo que

$$\mathbf{j} = \frac{I_0}{\pi a^2}\left(1 - \frac{(k\rho)^2}{4}\right)\hat{\mathbf{z}} = \frac{I_0}{\pi a^2}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2i}}{2\delta}\rho\right)^2\right)\hat{\mathbf{z}} \tag{13}$$

- Caso altas frecuencias $\frac{\delta}{a} \ll 1$ $\left(\frac{\delta}{\rho} \ll 1\right)$ usamos el limite asintótico para argumentos complejos de la funcion de Bessel

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Particularizo en $\nu = 0, 1$

$$J_0(k\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\cos\left(k\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\frac{1}{2}e^{\frac{1+i}{\delta}\rho}$$
$$J_1(ka) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka}}\cos\left(ka - \frac{3\pi}{4}\right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka}}\frac{1}{2}e^{\frac{1+i}{\delta}a}$$

Entonces se puede escribir a la corriente

$$\mathbf{j} \sim \frac{I_0(1+i)}{2\pi\delta\sqrt{a\rho}} e^{\frac{(1+i)}{\delta}(\rho-a)} \tag{14}$$

c) Para calcular la potencia media disipada y la resistencia efectiva en los casos limites. La densidad de energía es

$$w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \tag{15}$$

tomando el promedio temporal, promediando en un periodo

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \mathbb{Re} \left(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^* \right) = \frac{1}{2\sigma} |\mathbf{j}|^2 \tag{16}$$

posteriormente para obtener la potencia total disipada por unidad de longitud se tiene que integrar en la superficie

$$\langle W \rangle = \int dS \langle w \rangle \tag{17}$$

estas expresiones como quedan en términos de I_0^2 puedo despejar la resistencia efectiva por unidad de longitud de ellas $\langle W \rangle = \frac{I_0^2}{2} R$.

- Caso bajas frecuencias $\frac{\delta}{a} \gg 1$ ó $\left(\frac{\delta}{\rho} \gg 1 \right)$.

$$|\mathbf{j}|^2 = \frac{I_0^2}{(\pi a^2)^2} \left(1 + 4 \left(\frac{\rho}{2\delta} \right)^4 \right) \tag{18}$$

entonces tenemos que integrar

$$\langle W \rangle = 2\pi \int_0^a d\rho \rho \frac{1}{2\sigma} |\mathbf{j}|^2 = 2\pi \int_0^a d\rho \rho \frac{1}{2\sigma} \frac{I_0^2}{(\pi a^2)^2} \left(1 + 4 \left(\frac{\rho}{2\delta} \right)^4 \right) =$$
$$= \frac{I_0^2}{2\pi a^2 \sigma} \left(1 + \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 \frac{1}{12} \right)$$

donde la resistencia efectiva es

$$R = \frac{1}{\pi a^2 \sigma} \left(1 + \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 \frac{1}{12} \right) \tag{19}$$

- Caso altas frecuencias $\frac{\delta}{a} \ll 1$ ó $\left(\frac{\delta}{\rho} \ll 1 \right)$.

$$|\mathbf{j}|^2 \sim \frac{I_0^2}{2a\rho(\pi\delta)^2} e^{\frac{2(\rho-a)}{\delta}} \tag{20}$$

$$\langle W \rangle = 2\pi \int_0^a d\rho \rho \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{I_0^2}{2a\rho(\pi\delta)^2} e^{\frac{2(\rho-a)}{\delta}} \right) =$$
$$= \frac{I_0^2}{4\pi a \delta \sigma} \left(1 - e^{\frac{2a}{\delta}} \right)$$

y la resistencia efectiva es

$$R = \left(\frac{1}{2\pi a\delta\sigma}\right)\left(1 - e^{\frac{2a}{\delta}}\right).$$