Física Teórica 1 – 2do. cuatrimestre de 2022

Desarrollo multipolar de los campos de radiación.

*Versión extendida.**

La fórmula que tienen que saber deducir

Estas son las fórmulas clave en el desarrollo multipolar de los campos de radiación:

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\,\hat{r}\times\left[\hat{r}\times\int d^3r'\,\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}\left(\mathbf{r}', t-\frac{r}{c}+\frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{c}\right)\right], \tag{1}$$

$$\mathbf{B}_{\rm rad}(\mathbf{r},t) = \hat{r}\times\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{r},t), \qquad \mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_{\rm rad}(\mathbf{r},t)\times\hat{r}. \tag{2}$$

El camino lógico para llegar a estas fórmulas no es complicado. Probablemente lo más simple sea deducir una expresión para $\mathbf{B}_{\rm rad}$ y luego recordar que $\mathbf{E}_{\rm rad} = \mathbf{B}_{\rm rad}\times\hat{r}$. Digo que es más sencillo calcular $\mathbf{B}_{\rm rad}$ puesto que sólo necesitan conocer el potencial vector $\mathbf{A}$. En medio de un parcial, ese sería el camino a seguir si no recuerdan la ec. (1).

El desarrollo multipolar se obtiene haciendo un desarrollo de Taylor de la corriente alrededor del punto $t - r/c$. Es decir,

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{r},t) = \sum_{l=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{c^2 r}\,\hat{r}\times\left[\hat{r}\times\frac{1}{l!}\frac{\partial^{l+1}}{\partial t^{l+1}}\int d^3r'\,\left(\frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{c}\right)^{l}\,\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}. \tag{3}$$

Como referencia, pueden consultar las secciones 20.5.3 y 20.7 del libro de Zangwill. Aunque formalmente muy elegante, la versión que da Jackson en el capítulo 9 es de incómodo manejo en la resolución de problemas. Su análisis está restringido a fuentes armónicas, así que para cualquier problema que no tenga fuentes armónicas hay que hacer un análisis de Fourier. Sin embargo, leer lo que hace Jackson puede ayudar a entender mejor lo que hacemos aquí.

Lo que sigue ahora es la deducción de las ecuaciones anteriores y el estudio de los primeros términos del desarrollo de los campos en potencias de $1/c$. Hay muchas notas de carácter práctico intercaladas.

Campos de radiación

Los potenciales retardados en el *gauge* de Lorenz son:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\\ \varphi(\mathbf{r},t) &= \int d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.\end{aligned} \tag{4}$$

*zanellaj@df.uba.ar

Estas fórmulas no pueden no saberlas. El objetivo es encontrar los campos de radiación, asumiendo que las fuentes ρ y $\mathbf{j}$ están acotadas. Para fijar ideas, supondremos que ρ y $\mathbf{j}$ son cero más allá de una esfera de radio a centrada en el origen. Para encontrar los campos de radiación debemos quedarnos con los términos en los potenciales $\mathbf{A}$ y φ que den origen a campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ que no decaigan más rápidamente que $1/r$. El punto de observación está en $\mathbf{r} = r\,\hat{r}$, con $r > a$. Una vez que advertimos que calcularemos los campos que decaen como $1/r$, es evidente que la variable esencial aquí no va a ser r sino la dirección $\hat{r}$. Por ejemplo, encontraremos que

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r}\mathbf{f}\left(\hat{r}, t - \frac{r}{c}\right). \tag{5}$$

En general, los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ se obtienen a partir de los potenciales según las ecuaciones

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{6}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{7}$$

Al calcular el gradiente de φ y el rotor de $\mathbf{A}$, una de las contribuciones en cada caso vendrá a través del gradiente de los factores $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ que aparecen en los integrandos de las expresiones (4). Ahora bien, ese gradiente es

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sim \frac{1}{r^2}, \tag{8}$$

de modo que no será necesario tenerlo en cuenta para los campos de radiación. No sólo eso, sino que los propios factores $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \ldots, \tag{9}$$

pueden ser reemplazados por $1/r$. Por lo tanto, a los efectos del cálculo de los campos de radiación es suficiente considerar los potenciales

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{cr}\int d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)\,, \\ \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{r}\int d^3r'\, \rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)\,, \end{aligned} \tag{10}$$

y a los fines del cálculo de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ los factores $1/r$ fuera de las integrales pueden considerarse constantes al calcular las derivadas.

La otra clase de dependencia en $\mathbf{r}$, y que no es tan fácil de hacer a un lado, es la que aparece a través del tiempo retardado

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \tag{11}$$

Aquí ya no se trata de consideraciones geométricas, sino dinámicas. La dependencia en $\mathbf{r}$ surge a partir de las dependencias temporales de las fuentes. Debido a que nos interesa conservar sólo lo justo necesario para obtener los campos a orden $1/r$, escribamos

$$t' = t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{r} \cdot \mathbf{r}'}{c} + \mathcal{O}(1/r). \tag{12}$$

Puesto que en las expresiones para los potenciales $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\tilde{\varphi}$ ya hay factores de $1/r$ multiplicando las integrales, vemos que no es necesario escribir el tiempo retardado con mayor precisión que la que dan los términos mostrados en la ecuación anterior. A todos los efectos prácticos, para calcular los campos de radiación debemos escribir

$$t' = t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{r} \cdot \mathbf{r}'}{c}. \tag{13}$$

Notar que la combinación

$$t_r \equiv t - r/c \tag{14}$$

fija una especie de escala histórica de los tiempos. Las cosas a tiempo t y a una distancia r dependen de lo que pasaba cerca del origen en $t - r/c$. La corrección $\hat{r} \cdot \mathbf{r}'/c$ tiene en cuenta que las cosas ocurren no exactamente en el origen. Cuando $\mathbf{r}'$ apunte en la dirección de $\hat{r}$, el punto fuente estará más cerca del punto de observación que cuando $\mathbf{r}'$ y $\hat{r}$ sean antiparalelos. Por lo tanto, en el primer caso t' será levemente más grande que en el segundo, ya que la distancia a recorrer es menor.

En resumen: para calcular los campos de radiación es suficiente usar las siguientes expresiones aproximadas de los potenciales

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\rm rad}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{cr} \int d^3r' \; \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r} \cdot \mathbf{r}'/c)\,, \\ \varphi_{\rm rad}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{r} \int d^3r' \; \rho(\mathbf{r}', t_r + \hat{r} \cdot \mathbf{r}'/c)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Estarán de acuerdo que el paso que va de las ecs. (10) a las ecs. (15) es bastante trivial.

Ahora el cálculo de los campos $\mathbf{E}_{\rm rad}$ y $\mathbf{B}_{\rm rad}$ es relativamente sencillo. Al derivar, no necesitamos preocuparnos por los factores $1/r$ frente a las integrales. Más aún, tanto al calcular el rotor de $\mathbf{A}_{\rm rad}$ como el gradiente de $\varphi_{\rm rad}$ tendremos que derivar respecto del tiempo y tomar el gradiente de $t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c$. Pero

$$\nabla\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{c}\right) = -\frac{1}{c}\left[\hat{r} + \frac{(\hat{r}\cdot\mathbf{r}')\,\hat{r} - \mathbf{r}'}{r}\right] = -\frac{\hat{r}}{c} + \mathcal{O}(1/r), \tag{16}$$

de forma que podemos prescindir de la mayoría de los términos.

Deberían verificar que

$$\nabla\varphi_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) = -\frac{\hat{r}}{cr}\int d^3r'\,\frac{\partial\rho}{\partial t}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c) + \mathcal{O}\left(1/r^2\right), \tag{17}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) = -\frac{\hat{r}}{c^2 r}\times\int d^3r'\,\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c) + \mathcal{O}\left(1/r^2\right), \tag{18}$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}_{\text{rad}}}{\partial t}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{cr}\int d^3r'\,\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c). \tag{19}$$

Usando la ecuación de continuidad y la identidad

$$\Big[\nabla\cdot\mathbf{j}\Big](\mathbf{r}', t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c) = \nabla'\cdot\Big[\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c)\Big] - \frac{1}{c}\hat{r}\cdot\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c), \tag{20}$$

el gradiente del campo escalar resulta igual a

$$\nabla\varphi_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) = \frac{\hat{r}}{cr}\int d^3r'\,\left\{\nabla'\cdot\Big[\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c)\Big] - \frac{1}{c}\hat{r}\cdot\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c)\right\} + \mathcal{O}\left(1/r^2\right). \tag{21}$$

Por hipótesis, las fuentes están acotadas, de modo que la integral de la divergencia da cero, entonces

$$\nabla\varphi_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) = -\frac{\hat{r}}{c^2 r}\int d^3r'\,\hat{r}\cdot\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c) + \mathcal{O}\left(1/r^2\right). \tag{22}$$

Por lo tanto, al calcular el campo eléctrico, cuando sumemos las expresiones (17) y (19), dentro de la integral aparecerá la siguiente combinación de términos

$$\left(\hat{r}\cdot\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}\right)\hat{r} - \frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} = \hat{r}\times\left(\hat{r}\times\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}\right). \tag{23}$$

Reuniendo todos los resultados, queda

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) = \frac{\hat{r}}{c^2 r}\times\left[\hat{r}\times\int d^3r'\,\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c)\right], \tag{24}$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) = -\frac{\hat{r}}{c^2 r}\times\left[\int d^3r'\,\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r}\cdot\mathbf{r}'/c)\right]. \tag{25}$$

Se verifica entonces $\hat{r} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}} = \hat{r} \cdot \mathbf{B}_{\text{rad}} = 0$, y

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = \hat{r} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}, \qquad \mathbf{E}_{\text{rad}} = \mathbf{B}_{\text{rad}} \times \hat{r}, \tag{26}$$

así que bastará calcular uno cualquiera de los campos.

Para reconstruir estas expresiones lo más sencillo es obtener primero $\mathbf{B}_{\text{rad}}$, pues sólo requiere calcular el rotor de $\mathbf{A}_{\text{rad}}$. Luego bastará recordar que $\mathbf{E}_{\text{rad}} = \mathbf{B}_{\text{rad}} \times \hat{r}$. El siguiente esquema resume todo lo que hay que saber:

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \to \mathbf{A}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int d^3r' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c + \hat{r} \cdot \mathbf{r}'/c)\,, \\
\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hat{r}}{c^2 r} \times \left[\int d^3r' \, \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{r}', t - r/c + \hat{r} \cdot \mathbf{r}'/c) \right], \\
\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \times \hat{r}.
\end{gathered} \tag{27}$$

Donde implícitamente la ecuación que da $\mathbf{B}_{\text{rad}}$ debe entenderse a orden $1/r$.

Por último, notar que tanto $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ como $\mathbf{B}_{\text{rad}}$ pueden escribirse en términos de $\mathbf{A}_{\text{rad}}$,

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{r}}{c} \times \left[\hat{r} \times \dot{\mathbf{A}}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \right], \tag{28}$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hat{r}}{c} \times \dot{\mathbf{A}}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t), \tag{29}$$

donde

$$\dot{\mathbf{A}}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r + \hat{r} \cdot \mathbf{r}'/c). \tag{30}$$

Lo interesante de estas ecuaciones es que no aparece el potencial escalar φ.

A partir de aquí, omitiremos la indicación "rad". Todo lo que se diga será en el contexto de los campos de radiación.

Desarrollo multipolar de los campos de radiación

Las expresiones (24) y (25) para los campos de radiación de una fuente acotada son exactas. Evidentemente, habiendo fijado que los campos de radiación son aquellos que decaen como $1/r$, el nombre de "desarrollo multipolar" en este contexto no puede significar lo mismo que en los problemas estáticos. Los multipolos sucesivos no están asociados a potencias crecientes de $1/r$.

El desarrollo multipolar de los campos de radiación es una expansión de los campos en potencias de $1/c$. A partir de la ec. (24), es fácil ver que, en general, resulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\,\hat{r}\times\left[\hat{r}\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\frac{\partial^{l+1}}{\partial t^{l+1}}\int d^3r'\,\left(\frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{c}\right)^{l}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)\right]. \tag{31}$$

Uno de los objetivos de estas notas es que sepan cómo llegar a esta expresión de manera más o menos rápida. El paso que va de la ec. (24) a la ec. (31) es trivial.

Lo que sigue ahora es el análisis de los primeros términos en la expansión anterior. Preparándonos para eso, escribamos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{E}_l(\mathbf{r},t), \tag{32}$$

donde

$$\mathbf{E}_l(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\,\hat{r}\times\left[\hat{r}\times\frac{1}{l!}\frac{\partial^{l+1}}{\partial t^{l+1}}\int d^3r'\,\left(\frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{c}\right)^{l}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)\right]. \tag{33}$$

El campo de radiación hasta orden dipolar eléctrico

La primera aproximación para la expansión (31) consiste en considerar únicamente el término correspondiente a $l = 0$,

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\hat{r}\times\left[\hat{r}\times\frac{\partial}{\partial t}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)\right]. \tag{34}$$

Usando la identidad

$$\int d^3r\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\int d^3r\,\left[\nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r})\right]\,\mathbf{r}, \tag{35}$$

válida para cualquier campo que decaiga más rápido que r^{-3}, obtenemos

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c^2 r}\hat{r}\times\left\{\hat{r}\times\frac{\partial}{\partial t}\int d^3r'\,\left[\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)\right]\,\mathbf{r}'\right\}. \tag{36}$$

Mediante la ecuación de continuidad resulta

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\hat{r}\times\left[\hat{r}\times\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}',t_r)\,\mathbf{r}'\right]. \tag{37}$$

La última integral no es otra cosa que el momento dipolar eléctrico. Así que, finalmente,

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\,\hat{r}\times\left[\hat{r}\times\ddot{\mathbf{p}}(t_r)\right]. \tag{38}$$

Este es el término dipolar eléctrico en el desarrollo multipolar del campo de radiación.

El parámetro perturbativo en el desarrollo multipolar

Según notamos más arriba, el desarrollo multipolar es una expansión en potencias de $1/c$. Podemos refinar un poco esta observación. Volviendo a la ec. (33), vemos que si la fuente tiene una carga característica q, una escala de longitud a y una escala de tiempo τ, el término de orden l en el desarrollo del campo eléctrico de radiación es de orden

$$E_l \sim \frac{1}{c^2 r} \times \frac{1}{\tau^{l+1}} \times \frac{qa}{\tau} \times \frac{a^l}{c^l} = \frac{q}{r} \times \frac{1}{c\tau} \times \left(\frac{a}{c\tau}\right)^{l+1}. \tag{39}$$

Las escalas a y τ fijan una escala de velocidad $v = a/\tau$ y un β típico de orden $a/(c\tau)$. Por otro lado, la longitud de onda asociada a τ es $\lambda = c\tau$. Luego

$$E_l \sim \frac{q}{r\lambda}\beta^{l+1}. \tag{40}$$

De manera que la expansión multipolar puede pensarse también como una expansión en potencias de β. Alternativamente

$$E_l \sim \frac{q}{r\lambda}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{l+1}. \tag{41}$$

El cociente E_{l+1}/E_l es de orden $\beta = a/\lambda = a/(\tau c)$.

Los primeros términos del desarrollo multipolar darán una buena aproximación cuando $\beta \ll 1$ o $a \ll \lambda$. En el caso ultrarrelativista, $1 - \beta \ll 1$, no quedará otra opción que calcular tantos términos como sea necesario, o abandonar por completo la idea de hacer un desarrollo de los campos en potencias de $1/c$.

El campo de radiación de orden dipolar magnético-cuadrupolar eléctrico

Lo que encontramos hasta aquí es que

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r}\,\hat{r} \times [\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(t_r)]\,. \tag{42}$$

Veremos que el término asociado con $l = 1$ da una contribución mixta, algo trabajosa de desenredar, en donde aparecen el momento dipolar magnético y el cuadrupolar eléctrico.

El punto de partida es

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r}\,\hat{r} \times \left[\hat{r} \times \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int d^3r'\,\frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{c}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)\right]. \tag{43}$$

No hay ninguna razón de principio para querer escribir la integral en otra forma que no sea esta. Conocida $\mathbf{j}$ siempre podemos calcular la integral. Sin embargo tiene su interés ver si es posible escribir la expresión anterior en términos de uno o más multipolos. Eso es útil porque entonces es más fácil aplicar argumentos de simetría para saber si algo es o no cero.

El objeto realmente importante en la ec. (43) es

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \, (\hat{r} \cdot \mathbf{r}') \, \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r). \tag{44}$$

Usando nuevamente la identidad (35) y que $\nabla \cdot (f\mathbf{g}) = f \, \nabla \cdot \mathbf{g} + \nabla f \cdot \mathbf{g}$, resulta

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\int d^3r' \, \Big\{ (\hat{r} \cdot \mathbf{r}') \, \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) + [\hat{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)] \Big\} \mathbf{r}'. \tag{45}$$

Podemos reescribir el segundo término dentro de la integral como

$$(\hat{r} \cdot \mathbf{j})\mathbf{r}' = \hat{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) + (\hat{r} \cdot \mathbf{r}') \, \mathbf{j}. \tag{46}$$

El último término es justamente nuestro punto de partida en la ec. (44). Obtenemos una ecuación de la forma $A = B - A$, de modo que $A = B/2$. En nuestro caso resulta

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \int d^3r' \, \Big\{ (\hat{r} \cdot \mathbf{r}') \, \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \, \mathbf{r}' + \hat{r} \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)] \Big\}. \tag{47}$$

Usando la ecuación de continuidad queda

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \hat{r} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r' \, \rho(\mathbf{r}', t_r) \, \mathbf{r}'\mathbf{r}' - \frac{1}{2} \hat{r} \times \left[\int d^3r' \, \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \right]. \tag{48}$$

Un comentario sobre la notación

Tal vez a algunos les resulte extraña la notación $\mathbf{r}'\mathbf{r}'$. Posiblemente otros hayan visto algo así en mecánica clásica, cuando definieron el tensor de inercia. Estoy seguro de que al definir el tensor de Maxwell escribimos cosas tales como $\mathbf{EE}$. La notación $\mathbf{AB}$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos vectores, es un modo de representar un tensor. El objeto $\mathbf{AB}$ es una diada, y opera sobre vectores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot (\mathbf{AB}) &= (\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}, \\ (\mathbf{AB}) \cdot \boldsymbol{v} &= (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{v})\mathbf{A}, \end{aligned} \tag{49}$$

y análogamente para el producto vectorial. La ventaja de introducir el símbolo $\mathbf{r}'\mathbf{r}'$ es que no es necesario elegir ningún sistema de coordenadas en particular, es decir, ninguna base para los vectores $\mathbf{r}'$. Las componentes de un tensor $\mathbb{M}$ en una base determinada, digamos $\{\mathbf{e}_i\}$, se obtienen a partir de la acción del tensor sobre los vectores de la base,

$$\mathbb{M} \cdot \mathbf{e}_i = M_{ij} \mathbf{e}_j. \tag{50}$$

Si la base es una base de versores ortogonales,

$$M_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\mathbb{M} \cdot \boldsymbol{e}_j). \tag{51}$$

Así, en coordenadas cartesianas, las componentes del tensor $\mathbb{M} = \mathbf{r}'\mathbf{r}'$ son

$$M_{ij} = x_i' x_j'. \tag{52}$$

En estas coordenadas, el tensor

$$\int d^3r'\ \rho(\mathbf{r}', t_r)\ \mathbf{r}'\mathbf{r}' \tag{53}$$

estará representado por la matriz de integrales

$$\int d^3r' \begin{pmatrix} x'^2 & x'y' & x'z' \\ x'y' & y'^2 & y'z' \\ x'z' & y'z' & z'^2 \end{pmatrix} \rho(\mathbf{r}', t_r). \tag{54}$$

Escribir el tensor anterior en una forma que sea independiente de las coordenadas está muy bien, pero en la práctica uno suele terminar calculando las integrales en coordenadas cartesianas. ■

Volviendo al campo eléctrico $\mathbf{E}_1$. En definitiva,

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r}\hat{r} \times \left\{ \frac{1}{2c}\hat{r} \times \left[\hat{r} \cdot \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int d^3r'\ \rho(\mathbf{r}', t_r)\ \mathbf{r}'\mathbf{r}' \right] + \frac{1}{2c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3r'\ \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \right\}. \tag{55}$$

Evidentemente el primer término está relacionado con el momento cuadrupolar eléctrico, mientras que en el segundo término vemos que aparece el momento dipolar magnético,

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2c} \int d^3r\ \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \tag{56}$$

Definiendo el tensor

$$\mathbb{D}(t) = \int d^3r\ \rho(\mathbf{r}, t)\ \mathbf{r}\mathbf{r}, \tag{57}$$

y el vector $\mathbf{D} = \hat{r} \cdot \mathbb{D}$, obtenemos

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \left\{ \frac{1}{2c}\hat{r} \times \left[\hat{r} \times \dddot{\mathbf{D}}(t_r) \right] + \hat{r} \times \ddot{\mathbf{m}}(t_r) \right\}. \tag{58}$$

La primera contribución al campo $\mathbf{E}_1$ en la ec. (58) recibe el nombre de término cuadrupolar eléctrico, mientras que la segunda es el término dipolar magnético. Ambas son del mismo orden $1/c^3$. Por último, hay que notar dos cosas. Primero, que la definición de $\mathbf{D}$ esconde una dependencia adicional respecto del versor $\hat{r}$; y segundo, que el hecho de que el campo eléctrico asociado al término dipolar magnético sea igual a

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\hat{r}\times\ddot{\mathbf{m}}(t_r) \tag{59}$$

junto con la relación $\mathbf{E} = -\hat{r}\times\mathbf{B}$ no implican, como podría inferirse, que

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r},t) \overset{?}{=} -\frac{1}{c^2 r}\ddot{\mathbf{m}}(t_r). \tag{¡mal!}$$

En verdad, la relación correcta es

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r},t) = \hat{r}\times\mathbf{E}_m(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\hat{r}\times[\hat{r}\times\ddot{\mathbf{m}}(t_r)] = \frac{1}{c^2 r}\{[\hat{r}\cdot\ddot{\mathbf{m}}(t_r)]\,\hat{r} - \ddot{\mathbf{m}}(t_r)\}. \tag{60}$$

Lo que estamos diciendo es, esencialmente, que $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}$ no implica $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, y que hay que estar prevenidos.

El tensor $\mathbb{Q}$ en lugar de $\mathbb{D}$

En las fórmulas que encontrarán en los libros, en lugar del tensor $\mathbb{D}$ aparecerá el tensor de momento cuadrupolar eléctrico $\mathbb{Q}$. Veamos cómo $\mathbb{D}$ da paso a $\mathbb{Q}$. Recordemos que

$$\mathbb{Q}(t) = \int d^3r\ \rho(\mathbf{r},t)\left(3\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2\mathbb{I}\right), \tag{61}$$

de forma que

$$\mathbb{D}(t) = \frac{1}{3}\left[\mathbb{Q}(t) + \int d^3r\ r^2\ \rho(\mathbf{r},t)\ \mathbb{I}\right]. \tag{62}$$

Siempre podemos dejar las derivadas temporales para último momento, de modo que lo que nos interesa calcular para encontrar $\mathbf{E}_1$ es

$$\frac{1}{2}\hat{r}\times\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2}\hat{r}\times[\hat{r}\cdot\mathbb{D}(t)] = \frac{1}{6}\hat{r}\times\left[\hat{r}\cdot\mathbb{Q}(t) + \int d^3r' r'^2\ \rho(\mathbf{r}',t)\ \hat{r}\cdot\mathbb{I}\right]. \tag{63}$$

Pero el último término es nulo, puesto que $\hat{r}\times(\mathbb{I}\cdot\hat{r}) = \hat{r}\times\hat{r} = 0$. A fin de cuentas

$$\frac{1}{2}\hat{r}\times\mathbf{D} = \frac{1}{6}\hat{r}\times\mathbf{Q}, \tag{64}$$

donde $\mathbf{Q} = \hat{r}\cdot\mathbb{Q}$.

Resumiendo: el campo $\mathbf{E}_1$ de la ec. (58) también puede ser reescrito en términos de $\mathbb{Q}$,

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\left\{\frac{1}{6c}\hat{r}\times\left[\hat{r}\times\dddot{\mathbb{Q}}(t_r)\right] + \hat{r}\times\ddot{\mathbf{m}}(t_r)\right\}. \tag{65}$$

Esta expresión es útil a los efectos de mostrar la relación entre el campo $\mathbf{E}_1$ y el momento cuadrupolar eléctrico. Pero en la práctica, conviene usar la expresión (58), puesto que, en general, calcular $\mathbb{D}$ es un poco menos engorroso que calcular $\mathbb{Q}$. O dicho de otra forma: para calcular $\mathbb{Q}$ lo más eficiente es calcular primero $\mathbb{D}$; en efecto:

$$\mathbb{Q} = 3\mathbb{D} - (\mathbf{Tr}\,\mathbb{D})\,\mathbb{I}. \tag{66}$$

Pero si con calcular $\mathbb{D}$ nos alcanza, entonces ¿para qué continuar con el cálculo de $\mathbb{Q}$? Desde el punto de vista de los campos, no hay ninguna necesidad. Más adelante diremos algo respecto al cálculo de la potencia, donde sí puede ser más ventajoso usar $\mathbb{Q}$ en lugar de $\mathbb{D}$.

Si siguen el libro de Landau y Lifshitz estén atentos a lo siguiente: ellos usan la notación $\mathbb{D}$ para definir lo que nosotros aquí llamamos $\mathbb{Q}$.

Adaptar los cálculos a las fuentes

Otro punto esencial en la práctica es no perder de vista que el cálculo de los momentos multipolares que aparecen en los campos de radiación debe adaptarse a la forma particular de las fuentes. Si se trata de cargas puntuales, las integrales se reemplazarán por sumas. Si se trata de corrientes en hilos o de distribuciones lineales de carga, habrá que calcular integrales de línea, etc.

De todas maneras puede haber ciertas sutilezas que se resuelven mejor expresando todo como integrales espaciales. Un ejemplo de esto es el cálculo del momento dipolar magnético y del momento cuadrupolar eléctrico de un dipolo eléctrico que sigue cierta trayectoria. Es un buen lugar para recordar que las densidades de carga y de corriente asociadas a dipolos puntuales son

$$\begin{aligned}
&\rho(\mathbf{r},t) = -\mathbf{p}(t)\cdot\nabla\delta^3\big(\mathbf{r}-\mathbf{r_p}(t)\big),\\
&\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \delta^3\big(\mathbf{r}-\mathbf{r_p}(t)\big)\;\dot{\mathbf{p}}(t) - \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{p}(t)\cdot\nabla\delta^3\big(\mathbf{r}-\mathbf{r_p}(t)\big)\;\mathbf{p}(t) + c\;\nabla\delta^3\big(\mathbf{r}-\mathbf{r_m}(t)\big)\times\mathbf{m}(t).
\end{aligned} \tag{67}$$

El camino para deducir estas ecuaciones consiste en aplicar las relaciones

$$\rho_\mathbf{P} = -\nabla\cdot\mathbf{P}, \qquad \mathbf{j_P} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}, \qquad \mathbf{j_m} = c\,\nabla\times\mathbf{M}, \tag{68}$$

usando que para dipolos puntuales corresponden las densidades

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \delta^3\big(\mathbf{r}-\mathbf{r_p}(t)\big)\;\mathbf{p}(t), \qquad \mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \delta^3\big(\mathbf{r}-\mathbf{r_m}(t)\big)\;\mathbf{m}(t). \tag{69}$$

Calculen como ejercicio los momentos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico de un dipolo eléctrico que sigue una trayectoria $\mathbf{r}(t)$, y demuestren que el momento magnético de un dipolo magnético puntual es siempre $\mathbf{m}$.

Otra nota de carácter práctico es que si se trata de unas pocas cargas sueltas, y no de distribuciones extendidas de cargas y corrientes, no es necesario calcular explícitamente los momentos multipolares. Para calcular el campo $\mathbf{E}_l$ bastará con escribir

$$\int d^3r' \;\left(\hat{r}\cdot\mathbf{r}'\right)^l \;\mathbf{j}(\mathbf{r}',t) = \sum_{n=1}^{N} \left[\hat{r}\cdot\mathbf{r}_n(t_r)\right]^l q_n\,\dot{\mathbf{r}}_n(t_r). \tag{70}$$

Esto es particularmente útil si hay una sola carga. No tiene mayor sentido en ese caso que todo quede expresado en términos de los momentos multipolares.

La potencia por unidad de ángulo sólido y la potencia total

A través de la esfera de radio r hay un flujo de energía asociado al vector de Poynting de los campos de radiación. Consideremos un elemento $d\Omega$ de ángulo sólido. Eso define un elemento de área $r^2 d\Omega$ sobre la esfera. El flujo de energía por unidad de tiempo y unidad de ángulo sólido a través de ese elemento es

$$\frac{dP}{d\Omega}(\mathbf{r},t) = r^2\,\mathbf{S}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{r} = \frac{c}{4\pi}\left|r\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right|^2. \tag{71}$$

Aquí hemos usado que $\mathbf{S} = c/(4\pi)\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ y que para los campos de radiación $\mathbf{B} = \hat{r}\times\mathbf{E}$. Reemplazando el desarrollo multipolar del campo eléctrico queda

$$\frac{dP}{d\Omega}(\mathbf{r},t) = \frac{c}{4\pi}\,r^2\left|\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{E}_l(\mathbf{r},t)\right|^2. \tag{72}$$

Los términos cruzados

Como lo que importa en la ec. (72) es el módulo al cuadrado del campo eléctrico total, la potencia por unidad de ángulo sólido no es la suma de las potencias asociadas a cada término del desarrollo multipolar por separado. En general, si hay más de un término multipolar, el cálculo del módulo del campo eléctrico contendrá términos cruzados. Por caso, hasta orden $1/c^5$, la potencia por unidad de ángulo sólido estará dada por

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}r^2\left(|\mathbf{E}_0|^2 + 2\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_1 + |\mathbf{E}_1|^2 + 2\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_2\right). \tag{73}$$

El primer término es de orden $1/c^3$; el segundo, de orden $1/c^4$. Los dos últimos términos son ambos de orden $1/c^5$. Debido a que para cada orden l el campo suele ser la suma de varios términos, los propios $|\mathbf{E}_l|^2$ incluirán términos cruzados de distintos multipolos. Así, por ejemplo,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} + \mathbf{E}_{\mathfrak{m}}, \tag{74}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} &= \frac{1}{6c^3 r}\hat{r} \times \left[\hat{r} \times (\hat{r} \cdot \dddot{\mathbb{Q}})\right], \\ \mathbf{E}_{\mathfrak{m}} &= \frac{1}{c^2 r}\hat{r} \times \ddot{\mathfrak{m}}. \end{aligned} \tag{75}$$

(Quedan implícitos los argumentos de cada función). Entonces en la potencia por unidad de ángulo sólido aparecerá el término cruzado

$$\frac{dP_{\mathbb{Q}\mathfrak{m}}}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi} r^2\, \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{E}_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{12c^4\pi}\left\{\hat{r} \times \left[\hat{r} \times (\hat{r} \cdot \dddot{\mathbb{Q}})\right]\right\} \cdot (\hat{r} \times \ddot{\mathfrak{m}})\,. \tag{76}$$

La presencia de términos cruzados en la potencia por unidad de ángulo sólido es ciertamente engorrosa. Sin embargo, un resultado importante es que al calcular la potencia total, definida por

$$P = \int d\Omega\, \frac{dP}{d\Omega}, \tag{77}$$

la mayoría de los términos cruzados, al menos para los órdenes más bajos, se anulan; incluso términos cruzados para campos del mismo orden, como el que acabamos de escribir más arriba. Según demostraremos unas líneas más abajo,

$$P_{\mathbb{Q}\mathfrak{m}} = \int d\Omega\, \frac{dP_{\mathbb{Q}\mathfrak{m}}}{d\Omega} = 0. \tag{78}$$

Ciertas cancelaciones en la integral (77) son muy fáciles de anticipar, simplemente contando cuántas componentes cartesianas de $\hat{r}$ se están integrando. Por ejemplo, la contribución a la potencia del término cruzado dipolar eléctrico-dipolar magnético será proporcional a la integral

$$\int d\Omega\; [\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}})] \cdot (\hat{r} \times \ddot{\mathfrak{m}}). \tag{79}$$

Cada término dentro de esta integral será a su vez proporcional al producto de tres componentes de $\hat{r}$. Por lo tanto, cada término debe anularse por simetría, ya que

$$\int d\Omega\; (\hat{r})_i (\hat{r})_j (\hat{r})_k = 0. \tag{80}$$

Lo mismo ocurre con el término cruzado dipolar eléctrico-cuadrupolar eléctrico, pues involucra el producto de cinco componentes del versor $\hat{r}$.

Más sutil es la anulación del término cruzado dipolar magnético-cuadrupolar eléctrico, ec. (78). Expandiendo el doble producto vectorial, la integral de la expresión (76) es proporcional a

$$\mathcal{J} = \int d\Omega\ (\hat{r} \cdot \dddot{\mathbb{Q}}) \cdot (\hat{r} \times \ddot{m}). \tag{81}$$

Aquí aparecen dos factores $\hat{r}$, de manera que la simetría de inversión no tiene nada que decir. Sin embargo, desarrollando todo en coordenadas cartesianas resulta

$$\mathcal{J} = \int d\Omega\ (\hat{r})_i \dddot{Q}_{ij} \epsilon_{jkl} (\hat{r})_k \ddot{m}_l. \tag{82}$$

Por simetría, para que esta integral no sea nula debe ser $i = k$. Es decir,

$$\int d\Omega\ (\hat{r})_i (\hat{r})_k \propto \delta_{ik}. \tag{83}$$

También por simetría, fijado el valor de $i = k$, el resultado de la integral anterior no dependerá del valor de i. Da lo mismo integrar cualquiera de las componentes al cuadrado del versor $\hat{r}$. Lo más sencillo es calcular la integral de $(\hat{r})_z^2$,

$$\int d\Omega\ (\hat{r})_z^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\ \cos^2\theta = \frac{4\pi}{3}, \tag{84}$$

de modo que

$$\int d\Omega\ (\hat{r})_i (\hat{r})_k = \frac{4\pi}{3} \delta_{ik}. \tag{85}$$

Lo esencial aquí es únicamente la delta de Kronecker.

En definitiva

$$\mathcal{J} = \frac{4\pi}{3} \epsilon_{jil} \dddot{Q}_{ij} \ddot{m}_l. \tag{86}$$

La siguiente observación es crucial. Puesto que ϵ_{jil} es antisimétrico en los índices ij mientras que Q_{ij} es simétrico, debe ser $\mathcal{J} = 0$. Así, en la potencia total no hay un término cruzado dipolar magnético-cuadrupolar eléctrico. En conclusión, $P_{\mathbb{Q}m} = 0$.

La potencia total hasta orden $1/c^5$

De hecho, hasta orden $1/c^5$ hay un solo término cruzado distinto de cero en la potencia total. Hasta ese orden (ustedes pueden deducir fácilmente los dos primeros términos)

$$P(t) = \frac{2}{3c^3}\,|\ddot{\mathbf{p}}(t_r)|^2 + \frac{2}{3c^3}\,|\ddot{\mathbf{m}}(t_r)|^2 + \frac{1}{180c^5}\,\left|\dddot{\mathbb{Q}}(t_r)\right|^2 - \frac{4}{3c^4}\,\ddot{\mathbf{T}}(t_r)\cdot\ddot{\mathbf{p}}(t_r), \tag{87}$$

donde (este objeto es nuevo)

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{10c}\int d^3r'\,\left\{[\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\cdot\mathbf{r}']\,\mathbf{r}' - 2r'^2\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\right\}. \tag{88}$$

El vector $\mathbf{T}$ está relacionado con el campo de radiación justo un orden por encima del campo dipolar magnético-cuadrupolar eléctrico. Al escribir los campos no llegamos hasta ese orden, pero para calcular la potencia ese orden es necesario si se quiere ser consistente.

En la ec. (87) el significado de la expresión $|\dddot{\mathbb{Q}}|^2$ requiere una explicación. Para eso en la siguiente sección calcularemos explícitamente este término de la potencia.

El término cuadrupolar eléctrico

Deduciremos aquí el término de la potencia total asociado al momento cuadrupolar eléctrico. Este término proviene de calcular

$$P_{\mathbb{Q}} = \int d\Omega\,\frac{dP_{\mathbb{Q}}}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\int d\Omega\; r^2|\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}|^2 = \frac{1}{144\pi c^5}\int d\Omega\;\left|\hat{r}\times(\hat{r}\cdot\dddot{\mathbb{Q}})\right|^2. \tag{89}$$

Usando que $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 = A^2B^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$, encontramos

$$P_{\mathbb{Q}} = \frac{1}{144\pi c^5}\int d\Omega\;\left\{\left|\hat{r}\cdot\dddot{\mathbb{Q}}\right|^2 - \left[\hat{r}\cdot(\hat{r}\cdot\dddot{\mathbb{Q}})\right]^2\right\}. \tag{90}$$

Desarrollando en coordenadas cartesianas queda

$$P_{\mathbb{Q}} = \frac{1}{144\pi c^5}\int d\Omega\;\left[(\hat{r})_i(\hat{r})_k\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{kj} - (\hat{r})_i(\hat{r})_j(\hat{r})_k(\hat{r})_l\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{kl}\right]. \tag{91}$$

La integral del primer término puede calcularse usando la fórmula (85). Para la integral del segundo término necesitamos el siguiente resultado, que ustedes deberían demostrar,

$$\int d\Omega\;(\hat{r})_i(\hat{r})_j(\hat{r})_k(\hat{r})_l = \frac{4\pi}{15}\,(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{92}$$

Reuniendo todos estos ingredientes obtenemos

$$P_{\mathbb{Q}} = \frac{1}{144\pi c^5}\left[\frac{4\pi}{3}\,\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij} - \frac{4\pi}{15}\,\left(\dddot{Q}_{ii}\dddot{Q}_{jj} + \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij} + \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ji}\right)\right]. \tag{93}$$

El primer término dentro del paréntesis es nulo, debido a que la traza de $\mathbb{Q}$ es cero. Los otros términos tienen todos la misma forma. Finalmente,

$$P_{\mathbb{Q}} = \frac{1}{180c^5}\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij} = \frac{1}{180c^5}\,\mathbf{Tr}\left(\dddot{\mathbb{Q}}\right)^2. \tag{94}$$

Esto es lo que entendemos por $\left|\dddot{\mathbb{Q}}\right|^2$. Y aunque puede ser calculado en cualquier base, lo más práctico, probablemente, sea usar coordenadas cartesianas.

La potencia como propiedad intrínseca de la fuente

Formalmente, la potencia dada por la ec. (87) es la energía que atraviesa por unidad de tiempo la esfera de radio r. Esta expresión es válida hasta orden $1/c^5$. Quisiéramos definir la potencia emitida por la fuente a un tiempo t' sin referencia a ninguna esfera particular de radio r. Es decir, quisiéramos definir una cantidad intrínseca de la fuente. Lo más natural es *definir*

$$P(t') = \frac{2}{3c^3}\left|\ddot{\mathbf{p}}(t')\right|^2 + \frac{2}{3c^3}\left|\ddot{\mathbf{m}}(t')\right|^2 + \frac{1}{180c^5}\left|\dddot{\mathbb{Q}}(t')\right|^2 - \frac{4}{3c^4}\dddot{\mathbf{T}}(t')\cdot\ddot{\mathbf{p}}(t'). \tag{95}$$

Aquí el nombre de la variable le da otro significado a la función $P(t')$. Ésta ya no se refiere a la energía que atraviesa una esfera de radio r a tiempo t, sino a la energía que se emite a tiempo t'. Hay que tomar esto como una definición que nos independiza del radio r. La verdadera potencia emitida por la fuente a tiempo t' no es necesariamente esto que estamos definiendo. Basta recordar el caso de una carga acelerada. Para relacionar la potencia observada con la potencia emitida hacía falta incluir un factor de proyección $1-\hat{r}\cdot\boldsymbol{\beta}$, porque dt' no era igual a dt. Aquí no estamos considerando nada de ese estilo. De manera que $P(t')$ debe ser tomada sólo como una definición conveniente, cuyo significado físico recién adquiere valor cuando se considera una esfera de radio r a tiempo t.

Por error u omisión

Si consultan la ec. (71.5) del libro de Landau y Lifshitz, no encontrarán el último término de la ec. (95). Este término es omitido en la mayoría de los libros (en realidad no he visto ninguno que lo incluyese), aunque su contribución es del mismo orden que la de los términos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico. El término en cuestión proviene de un producto cruzado entre el campo dipolar eléctrico y el campo de orden inmediatamente superior al dipolar magnético-cuadrupolar eléctrico. La probable razón por la que este término sea omitido es que para ser distinto de cero debe ser $\ddot{\mathbf{p}}$ distinto de cero, en cuyo caso, con toda seguridad, en la potencia habrá un término dipolar eléctrico que dominará sobre el resto. La otra probable razón es que se trate simplemente de un error propagado en el tiempo a través de la literatura. La primera noticia que tuve de ese término vino a través de un artículo de 2018 que pueden consultar aquí https://doi.org/10.1119/1.5052427 (en la página de la materia hay un link directo). Se trata de una primicia para esta cátedra.

Con qué se van a encontrar

Volviendo al tema. En la mayoría de los problemas se les pide que calculen los campos de radiación hasta determinado orden. Si se les pide además la potencia total, no es necesario recordar la expresión (95). Basta integrar en cada caso particular la potencia por unidad de ángulo sólido,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \left| r\, \mathbf{E} \right|^2 , \tag{96}$$

con el campo $\mathbf{E}$ que les haya tocado en suerte. No deja de ser útil recordar, para no hacer cuentas de gusto, que la mayoría de los términos cruzados integran a cero. Si lo único que se les pidiera fuera la potencia total, entonces sí tendría sentido tener a mano la fórmula (95), pero el ejercicio pierde toda su gracia, así que difícilmente haya algo así en un parcial.

Una observación importante es que aunque para calcular los campos de radiación de orden cuadrupolar eléctrico lo más práctico sea usar el tensor $\mathbb{D}$, en la ec. (95) aparece el tensor $\mathbb{Q}$. En términos del tensor $\mathbb{D}$, la potencia asociada al término cuadrupolar tiene una expresión menos compacta. Podrían demostrar como ejercicio que

$$P_{\mathbb{Q}} = \frac{1}{20c^5} \left| \dddot{\mathbb{D}} \right|^2 - \frac{1}{60c^5} \left(\mathbf{Tr}\ \dddot{\mathbb{D}} \right)^2 . \tag{97}$$

Pero insisto, la idea no es tanto usar la ec. (95) sino hacer las integrales explícitamente en cada caso. Si recuerdan la ec. (95), entonces les puede servir como verificación.

Cosas que deben saber que existen

No hay tiempo aquí para entrar en detalles, pero deberían saber un par de cosas. Primero, cuando se habla de los campos de radiación de una fuente acotada, se está hablando de los campos que predominan tanto para $r \gg a$ como para $r \gg \lambda$. En estas notas sólo tuvimos en cuenta la primera condición. Si se preguntan por qué debería ser necesaria la segunda condición, la respuesta es que si conservásemos correcciones a los campos de radiación que decaigan como $1/r^2$, al término dipolar eléctrico, por ejemplo, que es de orden

$$\frac{1}{c^2 r}\ddot{p} \sim \frac{p}{r\lambda}\,\frac{1}{\lambda} \tag{98}$$

deberíamos agregar un término análogo de orden

$$\frac{1}{c r^2}\dot{p} \sim \frac{p}{r^2}\,\frac{1}{\lambda}. \tag{99}$$

Este término decae como $1/r^2$, pero si λ es mucho mayor que r puede dominar sobre el término de radiación propiamente dicho. De ahí que sea necesario pedir que $r \gg \lambda$. La región en la que $a \ll r \sim \lambda$ se llama zona de transición. En esa zona los campos de radiación que decaen como $1/r$ son comparables a las correcciones que van como $1/r^2$. Esos campos no pueden transportar energía, pero sí pueden transportar momento angular.

La otra cosa que deberían saber es que, así como en electrostática existe el desarrollo multipolar en coordenadas esféricas, el mismo tipo de desarrollo existe para los campos de radiación, pero el formalismo es muchísimo más complicado, porque no se trata de expandir un potencial escalar sino campos vectoriales. Vean por ejemplo el capítulo 16 del libro de Jackson.