Física Teórica 1 – 2do. cuatrimestre de 2022

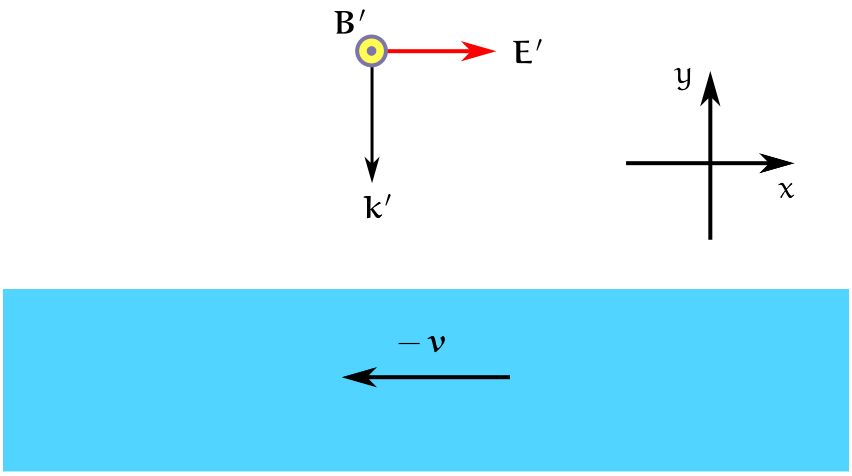
Segundo parcial con las soluciones (1/12/2022).*

■ **Problema 1** (4 puntos). Una nave sobrevuela paralelamente con velocidad v el océano en calma de un planeta de enorme tamaño. El índice de refracción del océano es n (con $\mu = 1$), y el índice de refracción de la atmósfera puede tomarse igual al del vacío. Para medir su altitud, la nave envía constantemente una onda plana contra la superficie del océano. En el sistema de referencia que se mueve con la nave, la onda plana viaja perpendicularmente hacia la superficie del océano y su campo eléctrico tiene módulo E' y es paralelo a la velocidad relativa entre la superficie y la nave.

(a) Calcular la intensidad de la onda reflejada recibida por la nave como función de v.

(b) ¿Para qué valor de v la nave no recibe onda reflejada?

Solución. Podemos asumir que E' es real y mayor que cero (¿por qué?). La figura muestra la situación desde el punto de vista de la nave.



*zanellaj@df.uba.ar

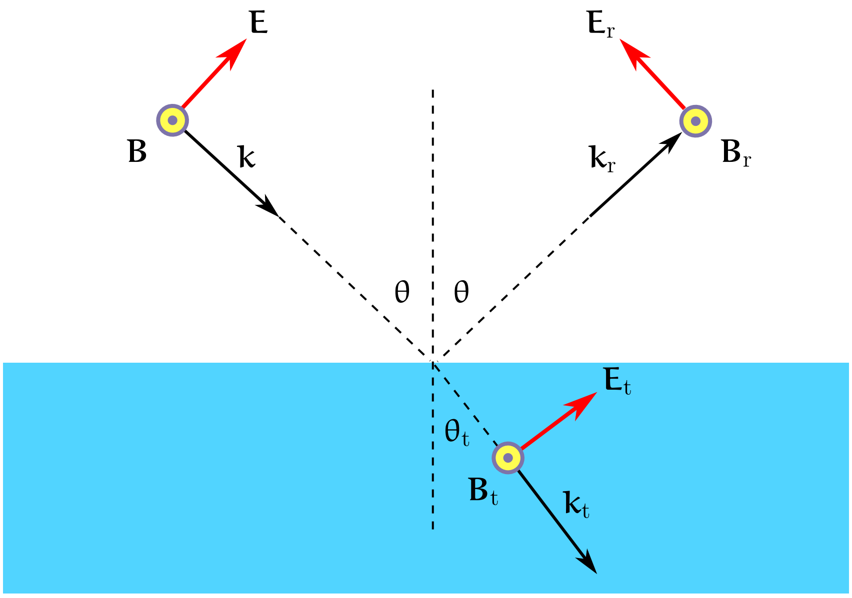
En el sistema de referencia que se mueve con la nave, el cuadrivector número de onda de la onda incidente es

$$k^{\mu'} = (k^{0'}, k'_x, k'_y, k'_z) = \frac{\omega'}{c}(1, 0, -1, 0). \tag{1}$$

Por otro lado, las amplitudes de los campos eléctrico y magnético son

$$\mathbf{E}' = E'\,\hat{x}, \qquad \mathbf{B}' = E'\,\hat{z}. \tag{2}$$

En el sistema de referencia en donde el océano está en reposo, la situación es como la que muestra la figura.



Aplicando las transformaciones que llevan del sistema de la nave al sistema del océano resulta

$$k^{\mu} = \frac{\omega'}{c}(\gamma, \gamma\beta, -1, 0) = \frac{\omega'}{c}\gamma\,(1, \beta, -1/\gamma, 0)\,, \tag{3}$$

$$\hat{k} = \beta\,\hat{x} - \frac{1}{\gamma}\,\hat{y}, \tag{4}$$

$$\mathbf{E} = E'(\hat{x} + \gamma\beta\,\hat{y}), \tag{5}$$

$$\mathbf{B} = \gamma E'\,\hat{z}. \tag{6}$$

Es fácil verificar que $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$ y que $\mathbf{B} = \hat{k}\times\mathbf{E}$. Notemos además que $E = \gamma E'$. De la segunda ecuación leemos

$$\cos\theta = 1/\gamma, \qquad \sin\theta = \beta. \tag{7}$$

En el sistema del océano, el cuadrivector número de onda de la onda reflejada es

$$k_r^\mu = \frac{\omega'}{c}\gamma\,(1, \beta, 1/\gamma, 0)\,. \tag{8}$$

Transformado al sistema de la nave obtenemos el resultado previsto,

$$k_r^{\mu\prime} = \frac{\omega'}{c}\gamma\big(\gamma(1-\beta^2), 0, 1/\gamma, 0\big) = \frac{\omega'}{c}(1, 0, 1, 0). \tag{9}$$

Es decir, la onda se refleja perpendicular a la superficie, $\hat{k}_r' = \hat{y}$, y con la misma frecuencia. En el sistema del océano tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= E_r(-\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}), \\ \mathbf{B}_r &= E_r\,\hat{z}. \end{aligned} \tag{10}$$

En el sistema de la nave será

$$\mathbf{E}_r' = E_r\big[-\cos\theta\,\hat{x} + \gamma\,(\sin\theta - \beta)\,\hat{y}\big] = -\frac{1}{\gamma}E_r\,\hat{x}. \tag{11}$$

Que el campo debía estar en la dirección $\hat{x}$ era previsible por el hecho de que $\mathbf{k}_r'$ está en la dirección $\hat{y}$.

Lo que sabemos hasta aquí es que

$$E_r' = \frac{1}{\gamma}E_r. \tag{12}$$

Si escribimos $E_r = RE$ y usamos que $E = \gamma E'$, resulta

$$E_r' = RE'. \tag{13}$$

Así que lo único que resta calcular es el coeficiente de reflexión R. En el problema usual de una interfase, R depende del ángulo de incidencia. En el problema de la nave, el ángulo de incidencia es función de la velocidad, de manera que será $R = R(\beta)$.

En los dos sistemas la incidencia es de tipo TM. Las dos ecuaciones que necesitamos para encontrar la amplitud de la onda reflejada son

$$\begin{aligned} (E - E_r)\cos\theta &= E_t\cos\theta_t, \\ E + E_r &= nE_t. \end{aligned} \tag{14}$$

Sólo nos interesa despejar E_r,

$$E_r = \frac{n\cos\theta - \cos\theta_t}{n\cos\theta + \cos\theta_t}\,E \quad\Rightarrow\quad R = \frac{n\cos\theta - \cos\theta_t}{n\cos\theta + \cos\theta_t}. \tag{15}$$

Asumiendo $n > 0$, usando la ley de Snell para escribir $\cos\theta_t$ y reemplazando el valor de θ hallado antes, se obtiene

$$R(\beta) = \frac{n^2 - \gamma\sqrt{n^2 - \beta^2}}{n^2 + \gamma\sqrt{n^2 - \beta^2}}. \tag{16}$$

La intensidad media de la onda reflejada en el sistema de la nave es

$$I'(\beta) = \frac{c}{8\pi}[E'_r(\beta)]^2 = \frac{c}{8\pi}[R(\beta)E']^2. \tag{17}$$

Para que no exista onda reflejada, debe ser

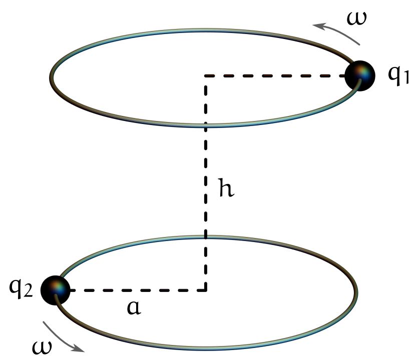
$$\begin{aligned} R(\beta) = 0 \quad &\Rightarrow \quad n^2 = \gamma\sqrt{n^2 - \beta^2} \\ &\Rightarrow \quad n^2(n^2 - 1) = (n^4 - 1)\beta^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Como era de prever, si $n = 1$, cualquier β es solución de la ecuación anterior. Si $n \neq 1$,

$$|\beta| = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}. \tag{19}$$

Necesariamente es $|\beta| < 1$, de modo que la condición $R(\beta) = 0$ siempre es realizable. Cuando $R(\beta) = 0$, la velocidad de la nave es tal que el ángulo de incidencia en el sistema del océano es igual al ángulo de Brewster.

■ **Problema 2** (4 puntos). El sistema de la figura consiste en dos cargas puntuales en movimiento circular uniforme. La posición de la carga q_1 es $\mathbf{r}_1 = h\hat{z} + a\hat{\rho}(\omega t)$, y la posición de la carga q_2 es $\mathbf{r}_2 = -a\hat{\rho}(\omega t)$. Se cumple la siguiente condición $h = c\pi/\omega$, y, además, $a \sim h$.



(a) Encontrar la fuerza que cada carga produce sobre la otra como función del tiempo.

(b) Expresar los campos de radiación producidos en la posición $d\,\hat{z}$, con $d \gg h$, y calcular la potencia por unidad de ángulo sólido emitida hacia ese punto.

Solución. La condición $h = c\pi/\omega$ significa que $a\omega/c = a\pi/h$. Como se dice que $a \sim h$, esto implica que $a\omega/c = \beta$ es relativista. Para calcular los campos que cada carga produce en la posición de la otra debemos usar los campos sin aproximar de una carga en movimiento arbitrario $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = q\left\{\frac{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{R^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n}\times\left[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{cR(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right\}_{t'(\mathbf{r},t)}, \tag{20}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = [\mathbf{n}]_{t'(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t).$$

donde $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ y donde la función $t'(\mathbf{r},t)$ está definida por la siguiente ecuación

$$c(t-t') = R(t'). \tag{21}$$

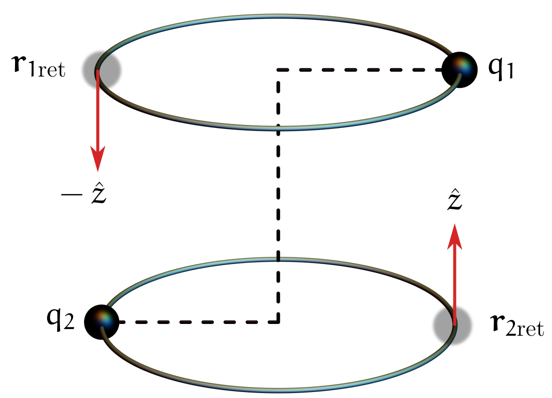
Debido a que queremos calcular el campo que cada carga produce en la posición de la otra, el vector $\mathbf{R}$ dependerá del tiempo tanto a través del punto fuente como del punto campo. Por ejemplo, para determinar el campo de la carga 2 en $\mathbf{r}_1(t)$ deberemos escribir

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t'), \tag{22}$$

donde

$$c(t-t') = |\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t')|. \tag{23}$$

La condición $h = c\pi/\omega$ podía leerse como $h/c = T/2$, donde T es el período de movimiento de las cargas. Esto quiere decir que el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia h es el mismo que tarda cada carga en dar medio giro. Lo que significa que cada carga *ve* a la otra justo por encima o por debajo, dependiendo de cuál se trate, como muestra la figura. Es decir, para la carga q_1 es $\mathbf{n}(t') = \hat{z}$, y para la carga q_2 es $\mathbf{n}(t') = -\hat{z}$. En ambos casos $R(t') = h$.



Con la ayuda $h/c = T/2$ era bastante fácil darse cuenta de esto. Sin embargo, si se escribe explícitamente, por ejemplo, la ecuación que determina el tiempo retardado de la segunda carga respecto de la primera, se encuentra

$$c(t-t') = |\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t')| = \sqrt{h^2 + 2a^2\left[1 + \cos\omega(t-t')\right]}. \tag{24}$$

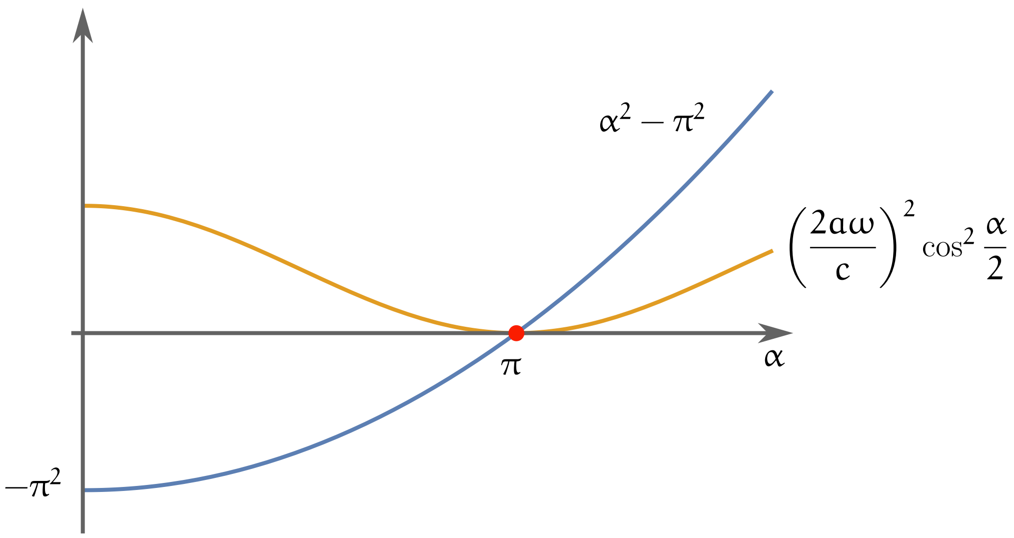
Como era previsible, la diferencia $t - t'$ debe ser constante, porque el movimiento es estacionario. Elevando al cuadrado la ecuación anterior y aplicando la identidad $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, obtenemos

$$c^2(t-t')^2 - h^2 = 4a^2\cos^2\tfrac{1}{2}\omega(t-t'). \tag{25}$$

Usando el dato $h = c\pi/\omega$, definiendo $\alpha = \omega(t-t')$ y reagrupando algunos términos,

$$\alpha^2 - \pi^2 = \left(\frac{2a\omega}{c}\right)^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}. \tag{26}$$

La incógnita en esta ecuación es α. Si representamos gráficamente la ecuación anterior obtenemos algo así:



Es evidente que la solución física, la que satisface $t' \leqslant t$, es

$$\alpha = \pi, \tag{27}$$

es decir,

$$\omega(t-t') = \pi \quad \Rightarrow t' = t - \frac{\pi}{\omega}. \tag{28}$$

En otras palabras, hay un desfasaje de ángulo π entre la posición actual y la posición retardada de la carga que produce el campo. Como de por sí las cargas ya estaban desfasadas en π, el desfasaje entre la posición retardada de q_2 y la posición actual de q_1 es nulo. El mismo resultado se obtiene para el tiempo retardado de la primera carga.

Al evaluar el campo que produce la carga 2 en la posición de la carga 1 debemos usar que el ángulo φ y la velocidad de la carga 2 evaluados en el tiempo retardado coinciden con el ángulo φ y la velocidad de la carga 1 a tiempo t. Además $\mathbf{n}(t')\cdot\boldsymbol{\beta}(t') = \hat{z}\cdot\boldsymbol{\beta}(t') = 0$. Teniendo todo esto en cuenta, el campo eléctrico producido por la carga 2 en la posición de la carga 1 está dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(t) &= q_2\left\{\frac{(\hat{z}-\beta\,\hat{\varphi}_1)}{\gamma^2h^2}+\frac{\hat{z}\times\left[(\hat{z}-\beta\,\hat{\varphi}_1)\times(-\omega\beta\,\hat{\rho}_1)\right]}{ch}\right\}\\ &= q_2\left[\frac{(\hat{z}-\beta\,\hat{\varphi}_1)}{\gamma^2h^2}+\frac{\beta^2}{ah}\hat{\rho}_1\right],\end{aligned} \tag{29}$$

donde

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}(\omega t), \qquad \hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}(\omega t). \tag{30}$$

Estos versores corresponden a la posición actual de la carga 1, o si se quiere, a la posición actual de la imagen de la carga 2 vista desde la carga 1. Por otro lado, el campo magnético correspondiente es

$$\mathbf{B}_1(t) = \hat{z}\times\mathbf{E}_1(t) = q_2\left(\frac{\beta}{\gamma^2h^2}\,\hat{\rho}_1+\frac{\beta^2}{ah}\,\hat{\varphi}_1\right). \tag{31}$$

El campo de la carga 1 en la posición de la carga 2 se calcula de modo semejante:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_2(t) &= q_1\left\{\frac{(-\hat{z}-\beta\,\hat{\varphi}_2)}{\gamma^2h^2}+\frac{(-\hat{z})\times\left[(-\hat{z}-\beta\,\hat{\varphi}_2)\times(-\omega\beta\,\hat{\rho}_2)\right]}{ch}\right\}\\ &= -q_1\left[\frac{(\hat{z}+\beta\,\hat{\varphi}_2)}{\gamma^2h^2}-\frac{\beta^2}{ah}\,\hat{\rho}_2\right],\end{aligned} \tag{32}$$

donde $\hat{\rho}_2 = -\hat{\rho}(\omega t)$ y $\hat{\varphi}_2 = -\hat{\varphi}(\omega t)$. Estos versores son los que corresponden a la posición de la carga 2, pero en realidad su interpretación original es la de ser los versores correspondientes a la imagen de la carga 1 vista desde la carga 2. El campo magnético es

$$\mathbf{B}_2(t) = -\hat{z}\times\mathbf{E}_2(t) = -q_1\left(\frac{\beta}{\gamma^2h^2}\hat{\rho}_2+\frac{\beta^2}{ah}\hat{\varphi}_2\right). \tag{33}$$

La situación de las dos cargas es completamente equivalente. Si hiciéramos una inversión con respecto al punto $\frac{1}{2}h\,\hat{z}$ e intercambiáramos los nombres de las cargas deberíamos obtener las mismas expresiones para los campos. Teniendo en cuenta las propiedades de transformación de los campos pueden verificar que esto es así.

Pasemos al cálculo de las fuerzas. La fuerza sobre la carga 1 debida a los campos que produce la carga 2 es

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1(t) = q_1\Big[\mathbf{E}_1(t) + \beta\hat{\varphi}_1 \times \mathbf{B}_1(t)\Big] &= q_1 q_2 \left[\frac{(\hat{z} - \beta\,\hat{\varphi}_1)}{\gamma^2 h^2} + \frac{\beta^2}{a h}\,\hat{\rho}_1 - \frac{\beta^2}{\gamma^2 h^2}\,\hat{z}\right] \\ &= q_1 q_2 \left(-\frac{\beta}{\gamma^2 h^2}\,\hat{\varphi}_1 + \frac{\beta^2}{a h}\,\hat{\rho}_1 + \frac{1}{\gamma^4 h^2}\,\hat{z}\right).\end{aligned} \tag{34}$$

Análogamente, la fuerza sobre la carga 2 debida a los campos de la carga 1 es

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2(t) = q_2\Big[\mathbf{E}_2(t) + \beta\hat{\varphi}_2 \times \mathbf{B}_2(t)\Big] &= q_1 q_2 \left[-\frac{(\hat{z} + \beta\,\hat{\varphi}_2)}{\gamma^2 h^2} + \frac{\beta^2}{a h}\,\hat{\rho}_2 + \frac{\beta^2}{\gamma^2 h^2}\,\hat{z}\right] \\ &= q_1 q_2 \left(-\frac{\beta}{\gamma^2 h^2}\,\hat{\varphi}_2 + \frac{\beta^2}{a h}\,\hat{\rho}_2 - \frac{1}{\gamma^4 h^2}\,\hat{z}\right).\end{aligned} \tag{35}$$

Notar que $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. En electrodinámica, el cumplimiento del principio newtoniano de acción y reacción es la excepción y no la regla (ver el problema 12 de la Guía 6). Aquí se cumple debido a la simetría del problema.

En la última parte del problema, la aproximación multipolar no es aplicable, porque $h \sim \lambda$. Para calcular el campo eléctrico de radiación en el punto $\mathbf{r} = d\,\hat{z}$, con $d \gg a \sim h$, vamos a sumar los campos de radiación producidos por cada carga.

El campo de radiación de una carga en movimiento arbitrario

Los campos de radiación tienen su origen en los campos de aceleración, pero no son siempre la misma cosa; depende del contexto. El campo de aceleración es

$$\mathbf{E}_{\text{acel}}(\mathbf{r}, t) = q \left\{\frac{\mathbf{n} \times \Big[(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\Big]}{cR(1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right\}_{t'(\mathbf{r},t)}. \tag{36}$$

Supongamos que, durante el período de observación, la posición retardada de la carga permanece en una región acotada de radio a, esto es, $|\mathbf{r}(t')| < a$. Estamos interesados en la zona en la que $r \gg a$. Siempre podemos redefinir el origen de coordenadas y restringir el tiempo de observación para asegurarnos de que valga esa condición. Sin embargo, eso no significa que el campo de aceleración vaya a ser el campo dominante.

En este contexto, para obtener el campo de radiación hay que expandir el campo de aceleración en potencias de $1/r$ y hay que retener únicamente los términos que decaen como $1/r$. En la expresión (36), hay dos dependencias con r por completo diferentes: i) las de carácter geométrico, como las que vienen a través de la distancia $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|$ y de la normal $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$, y ii) las de carácter dinámico, que son las que vienen a través del tiempo retardado.

Las expansiones de la función $|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|$ y de su recíproca se obtienen a partir de escribir

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'} = r\sqrt{1 - \frac{2\,\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}}. \tag{37}$$

Para expandir esta función lo más sencillo es trabajar vectorialmente. El desarrollo de Taylor de la función $\sqrt{1+x}$ es

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots \tag{38}$$

Tomando

$$x = -\frac{2\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}, \tag{39}$$

resulta

$$\sqrt{1 - \frac{2\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}} = 1 - \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\right)^2 + \ldots \tag{40}$$

Notar que no estamos reteniendo todos los términos asociados a x^2, porque se irían más allá del orden buscado. Aquí el corte está en $1/r^2$. Finalmente,

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r - \hat{r}\cdot\mathbf{r}' + \frac{1}{2r}\left[r'^2 - (\hat{r}\cdot\mathbf{r}')^2\right] + \ldots \tag{41}$$

En el desarrollo del campo de aceleración será suficiente con los dos primeros términos; retuvimos términos de orden $1/r$ sólo con el fin de ilustrar los detalles de la cuenta.

Para expandir la función $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|$ seguimos la misma estrategia, pero ahora usando el desarrollo de Taylor de la función $1/\sqrt{1+x}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \ldots \tag{42}$$

Así,

$$\frac{1}{R(t')} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|} = \frac{1}{r} + \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}(t')}{r^2} + \mathcal{O}(1/r^3). \tag{43}$$

Entonces, hasta orden $1/r$ es suficiente con la sustitución $R \to r$ en la ec. (36),

$$\mathbf{E}_{\text{acel}}(\mathbf{r},t) \simeq \frac{q}{cr}\left\{\frac{\mathbf{n}\times\left[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right\}_{t'(\mathbf{r},t)}. \tag{44}$$

Con la normal ocurre algo parecido. En principio,

$$\mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}. \tag{45}$$

Haciendo un desarrollo en potencias de $1/r$, resulta

$$\mathbf{n}(t') = \hat{r} - \frac{\mathbf{r}(t')}{r} + \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}(t')}{r}\,\hat{r} + \mathcal{O}(1/r^2). \tag{46}$$

Como ya tenemos un factor $1/r$ al frente de la expresión (44), sólo es necesario conservar el primer término de este desarrollo. De modo que ahora hacemos la sustitución $\mathbf{n} \to \hat{r}$,

$$\mathbf{E}_{\text{acel}}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{q}{cr}\left\{\frac{\hat{r}\times\left[(\hat{r}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{(1-\hat{r}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right\}_{t'(\mathbf{r},t)}. \tag{47}$$

En definitiva, lo que hicimos hasta aquí fue sustituir $R \to r$ y $\mathbf{n} \to \hat{r}$. Esto da cuenta de las dependencias geométricas del campo de aceleración con respecto a r. Pasemos a las dependencias dinámicas, que involucran la dependencia con r a través del tiempo.

El tiempo retardado se calcula, en general, a partir de la ecuación

$$c(t - t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|. \tag{48}$$

Aún sin resolver la ecuación anterior, expandiendo el módulo de $\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')$, podemos escribir

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}(t')}{c} + \mathcal{O}(1/r). \tag{49}$$

Si escribiéramos t' conservando términos de orden $1/r$, digamos, $t' = t - r/c + A + B/r$, en el campo de aceleración aparecerían cosas del estilo

$$\beta(t - r/c + A + B/r) = \beta(t - r/c + A) + \frac{B}{r}\,\dot{\beta}(t - r/c + A) + \ldots, \tag{50}$$

y, por lo tanto, estaríamos generando términos de orden $1/r^2$ o superior, porque ya tenemos un factor $1/r$ al frente de la expresión (47). Entonces, para calcular el campo de radiación, t' es solución de la siguiente ecuación:

$$t' = t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}(t')}{c} \equiv t_r + \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}(t')}{c}. \tag{51}$$

Esto es completamente análogo a las aproximaciones hechas para deducir el desarrollo multipolar de los campos de radiación, donde

$$\mathbf{A}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr}\int d^3r'\,\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t_r + \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{c}\right), \quad \Phi_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r}\int d^3r'\,\rho\left(\mathbf{r}', t_r + \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{c}\right). \tag{52}$$

Resumiendo, el campo de radiación de una carga en movimiento arbitrario en una región acotada $|\mathbf{r}(t')| < a$ es

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{cr} \left\{ \frac{\hat{r} \times \left[(\hat{r} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right]}{(1 - \hat{r} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{t'(\mathbf{r},t)}, \tag{53}$$

donde t' es la solución de la ecuación

$$t' = t_r + \frac{\hat{r} \cdot \mathbf{r}(t')}{c}. \tag{54}$$

Por más lejos que esté el punto de observación, y por más grande que sea t_r, el intervalo

$$\Delta t = \frac{\hat{r} \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \tag{55}$$

no es en general despreciable. No se trata de comparar t_r con Δt. Se trata de ver cuánto varían durante el intervalo Δt las magnitudes asociadas a la carga. Por ejemplo,

$$\beta(t') = \beta(t_r + \Delta t). \tag{56}$$

El hecho de que Δt pueda despreciarse al evaluar $\beta(t')$ no depende de la magnitud relativa de t_r y Δt, sino de la velocidad de variación de β. La aproximación

$$\beta(t') \approx \beta(t_r) \tag{57}$$

sólo tiene sentido si β cambia poco durante el intervalo de tiempo Δt, es decir, si

$$\left| \frac{\Delta t\, \dot{\beta}(t_r)}{\beta(t_r)} \right| \ll 1. \tag{58}$$

Aquí la comparación entre Δt y t_r no tiene ninguna relevancia. Lo importante es la comparación entre Δt y el intervalo de variación típico de β,

$$\tau = \left| \frac{\beta(t_r)}{\dot{\beta}(t_r)} \right|. \tag{59}$$

Esto quedará claro si pensamos, por caso, en la función $f(t) = \cos \omega t$, con $\omega = 1$ Hz, para fijar ideas. Supongan que estamos a dos millones de años luz de la región desde donde la carga emitió la radiación que recibimos justo ahora, de modo que

$$t_r = \text{ahora} - \text{dos millones de años}. \tag{60}$$

Ustedes pueden pensar que un segundo más o menos no hace la diferencia. Pero en un segundo la fase ωt varía en algo del orden de 1. La variación de la función $\cos x$ cuando x varía en 1 no es despreciable.

Si quieren algo más gráfico, mediten en la monstruosidad que significaría, basados en el hecho de que $\pi/10^{100} \ll 1$, decir que

$$\cos\left(10^{100} + \pi\right) \approx \cos 10^{100}. \tag{61}$$

O, dado que la edad del universo es del orden de 10^{10} años, ¿por qué no aproximamos la fecha de hoy por algo más conveniente, como ser las 12 GMT del año 1 d.C.?

Volviendo al problema

Nuestro punto de partida es la expresión (53), pero dejaremos de lado el subíndice "rad". Para $\mathbf{r} = d\,\hat{z}$, el campo de radiación debido a cada carga es

$$\mathbf{E}_i(t) = \frac{q_i}{cd}\left\{\frac{\hat{z}\times\left[(\hat{z}-\boldsymbol{\beta}_i)\times\dot{\boldsymbol{\beta}}_i\right]}{(1-\hat{z}\cdot\boldsymbol{\beta}_i)^3}\right\}_{t_i'(t)}. \tag{62}$$

Como las velocidades $\boldsymbol{\beta}_i$ están en el plano xy, los factores $\hat{z}\cdot\boldsymbol{\beta}_i$ son iguales a cero,

$$\mathbf{E}_i(t) = \frac{q_i}{cr}\left\{\hat{z}\times\left[(\hat{z}-\boldsymbol{\beta}_i)\times\dot{\boldsymbol{\beta}}_i\right]\right\}_{t_i'(t)}. \tag{63}$$

Necesitamos calcular los tiempos retardados. El punto de observación está elegido de tal manera que este cálculo sea sencillo. Podríamos usar directamente la ec. (54), pero para enfatizar su origen vamos a usar la ecuación exacta para el tiempo retardado y haremos las aproximaciones sobre la marcha. Para la carga 1, hay que resolver la ecuación

$$c(t-t_1') = \sqrt{(d-h)^2+a^2} \quad \Rightarrow t_1' = t - \frac{1}{c}\sqrt{(d-h)^2+a^2} = t - \frac{1}{c}\left[d-h+\mathcal{O}(1/d)\right]. \tag{64}$$

En el cálculo de los campos de radiación, sólo debemos conservar los términos que sean a lo sumo de orden 0 en $1/d$. Es decir, hay que escribir

$$t_1' = t - \frac{d}{c} + \frac{h}{c} \equiv t_d + \frac{h}{c}. \tag{65}$$

La longitud h podrá ser despreciable respecto de d, pero el intervalo h/c no es despreciable respecto a $1/\omega$. Es fundamental conservar el término h/c en el tiempo retardado de la primera carga. Según las condiciones del problema, $h/c = \pi/\omega$, de manera que

$$\omega t_1' = \omega t_d + \pi. \tag{66}$$

Si en t_1' despreciáramos el término h/c, estaríamos cometiendo un error de π en la fase, lo que no es de ninguna manera despreciable. Para la carga 2, es simplemente

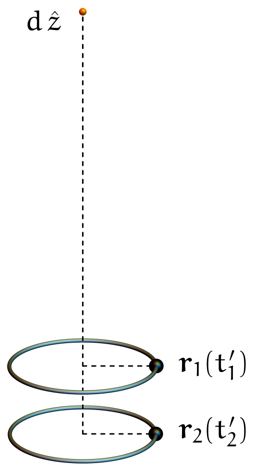
$$t_2' = t - \frac{1}{c}\sqrt{d^2 + a^2} = t - \frac{d}{c} - \frac{a^2}{2cd} + \ldots = t_d + \mathcal{O}(1/d). \tag{67}$$

Para calcular el campo de radiación de esta carga, habrá que escribir $t_2' = t_d$.

Lo anterior implica que $\omega t_1' = \omega t_2' + \pi$. Pero $\varphi_1(t) = \omega t$ y $\varphi_2(t) = \omega t + \pi$. Entonces,

$$\varphi_1(t_1') = \omega t_1' = \omega t_2' + \pi = \varphi(t_2'). \tag{68}$$

Las coordenadas retardadas $\varphi_1(t_1')$ y $\varphi_2(t_2')$ de las dos cargas coinciden. Desde el punto $d\,\hat{z}$, las posiciones retardadas de las cargas son como las que muestra la figura. Retrospectivamente, este resultado es obvio.



Puesto que sólo son funciones de los ángulos φ_i, las velocidades y aceleraciones retardadas de las dos cargas serán iguales.

El campo de cada carga es

$$\mathbf{E}_i(t) = \frac{q_i}{cd}\,\hat{z} \times \left\{ \left[\hat{z} - \boldsymbol{\beta}_i(t_i') \right] \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_i(t_i') \right\}.$$

Según lo dicho más arriba, $\boldsymbol{\beta}_1(t_1') = \boldsymbol{\beta}_2(t_2')$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}_1(t_1') = \dot{\boldsymbol{\beta}}_2(t_2')$. Luego, debido a que

$$\boldsymbol{\beta}_1(t) = \beta\,\hat{\varphi}(\omega t), \qquad \dot{\boldsymbol{\beta}}_1(t) = -\omega\beta\,\hat{\rho}(\omega t), \tag{69}$$

queda

$$\mathbf{E}_i(t) = -\frac{q_i\omega\beta}{cd}\,\hat{z} \times \left\{ \left[\hat{z} - \beta\,\hat{\varphi}(\omega t_1') \right] \times\, \hat{\rho}(\omega t_1') \right\} = \frac{q_i\omega\beta}{cd}\,\hat{\rho}(\omega t_1'). \tag{70}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\omega t_1' = \omega t_d + \pi$, sumando las dos contribuciones obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(t) &= -\frac{\omega\beta}{cd}(q_1+q_2)\,\hat{\rho}(\omega t_d) = -\frac{\omega^2 a}{c^2 d}(q_1+q_2)\,\hat{\rho}(\omega t_d)\,,\\
\mathbf{B}(t) &= \hat{z}\times\mathbf{E}(t) = -\frac{\omega^2 a}{c^2 d}(q_1+q_2)\,\hat{\varphi}(\omega t_d)\,.
\end{aligned}
\tag{71}
$$

Superficialmente, esto tiene el aspecto de un término de radiación dipolar eléctrico. Pero es fácil ver que para este sistema el término de radiación dipolar eléctrico en el punto $d\,\hat{z}$ es

$$
\mathbf{E}_0(t) = \frac{\omega^2 a}{c^2 d}(q_1-q_2)\,\hat{\rho}(\omega t_d)\,. \tag{72}
$$

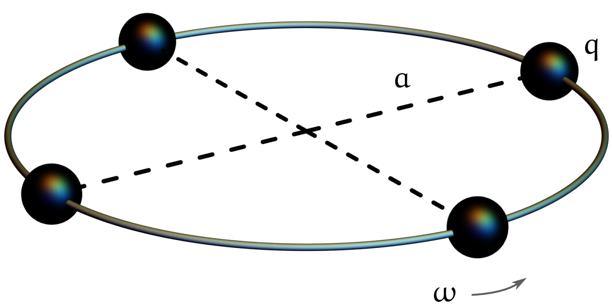
Aquí queda claro lo errada que está la aproximación dipolar eléctrica en este problema. Cargas iguales dan, por ejemplo, $\mathbf{E}_0 = 0$. Mientras que para anular $\mathbf{E}$ debe ser $q_1 = -q_2$. Es lógico que la aproximación falle completamente, debido a que $h = \pi c/\omega$ y $\pi c/\omega$ es del orden de la longitud de onda típica del sistema. No sólo eso afecta la validez de la aproximación multipolar, sino que la condición $a \sim h$ también implica $\beta \sim 1$, algo que ya observamos al principio del problema. Las dimensiones del sistema son comparables con la longitud de onda y además las velocidades son relativistas. Sin embargo, para el punto $d\,\hat{z}$ los efectos relativistas están suprimidos, pues $\boldsymbol{\beta}_i\cdot\hat{z} = 0$ y además $\hat{z}\times(\boldsymbol{\beta}_i\times\dot{\boldsymbol{\beta}}_i) = 0$.

Finalmente, la potencia por unidad de ángulo sólido en el punto $d\,\hat{z}$ es

$$
\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}d^2|\mathbf{E}(t)|^2 = \frac{\omega^4 a^2}{4\pi c^3}(q_1+q_2)^2. \tag{73}
$$

Era esperable que la potencia fuera constante, porque una traslación en el tiempo puede compensarse por una rotación; esto sólo ocurre para puntos sobre el eje z. Notar especialmente que la potencia no es la suma de un término debido a q_1 y otro término debido a q_2, es decir, algo del estilo $\alpha_1 q_1^2 + \alpha_2 q_2^2$, sino que hay términos cruzados.

■ **Problema 3** (2 puntos). Cuatro cargas de valor q se mueven uniformemente sobre un círculo de radio a centrado en el origen y contenido en el plano xy. Las cargas están separadas de sus vecinas por un cuarto de círculo. Encontrar el campo de radiación en la aproximación multipolar hasta orden dipolar magnético-cuadrupolar eléctrico.



Solución. Trivialmente se veía que $\mathbf{p} = 0$, que $\mathbf{m}(t) = m_0\,\hat{z}$ y que $\mathbb{D}$ está representado en coordenadas cartesianas por una matriz de componentes constantes. Por lo tanto, hasta el orden requerido, el campo de radiación es cero.

La manera más directa de ver que $\mathbb{D}$ es constante consiste en calcular sus componentes en la base xyz. Debido a que todas las cargas está en el plano xy, sólo es necesario calcular D_{xx}, D_{yy} y D_{xy}. Si la coordenada φ de la primera carga es ωt, entonces

$$\begin{aligned} D_{xx} &= q(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 2qa^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = 2qa^2, \\ D_{yy} &= q(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = 2qa^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = 2qa^2, \\ D_{xy} &= q(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4) = 2qa^2(\cos\omega t\ \sin\omega t - \sin\omega t\ \cos\omega t) = 0. \end{aligned} \tag{74}$$

De modo que las componentes de $\mathbb{D}$ son constantes y el término cuadrupolar es nulo.

Una manera elegante de demostrar que el tensor $\mathbb{D}$ es constante consiste en usar notación de diadas,

$$\mathbb{D}(t) = q\sum_{n=1}^{4} \mathbf{r}_n(t)\mathbf{r}_n(t). \tag{75}$$

Suponiendo que la coordenada φ de la carga 1 sea $\varphi = \omega t$, puesto que las cargas vecinas están desfasadas en $\pi/2$ y las opuestas en π, resulta

$$\mathbb{D}(t) = 2a^2 q(\hat{\rho}\hat{\rho} + \hat{\varphi}\hat{\varphi}), \tag{76}$$

donde todos los versores están evaluados en ωt. Pero la expresión anterior no es otra cosa que el tensor identidad, $\mathbb{I} = \hat{\rho}\hat{\rho} + \hat{\varphi}\hat{\varphi} + \hat{z}\hat{z}$, menos un término constante. En efecto,

$$\mathbb{D}(t) = 2a^2 q(\mathbb{I} - \hat{z}\hat{z}). \tag{77}$$

De aquí es evidente que $\mathbb{D}$ no depende del tiempo.

Aun otra forma (admito que más rebuscada) de ver que no hay término dipolar magnético-cuadrupolar eléctrico es tomar el término completo del desarrollo multipolar, sin hacer la separación entre una cosa y la otra. En el desarrollo multipolar, el orden $l = 1$ es

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r}\hat{r} \times \left[\hat{r} \times \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int d^3r'\ \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}'}{c}\ \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)\right]. \tag{78}$$

El objeto importante es aquí

$$\int d^3r'\ \mathbf{r}'\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = q\sum_{n=1}^{4} \mathbf{r}_n(t)\mathbf{v}_n(t). \tag{79}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}_1 = a\,\hat{\rho}, \quad \mathbf{v}_1 = \omega a\,\hat{\varphi}, \quad \mathbf{r}_2 = a\,\hat{\varphi}, \quad \mathbf{v}_2 = -\omega a\,\hat{\rho}, \\ &\mathbf{r}_3 = -\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{r}_4 = -\mathbf{r}_2, \quad \mathbf{v}_4 = -\mathbf{v}_2, \end{aligned} \tag{80}$$

donde todos los versores están evaluados en ωt. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{4} \mathbf{r}_n \mathbf{v}_n = 2\omega a^2 (\hat{\rho}\hat{\varphi} - \hat{\varphi}\hat{\rho}). \tag{81}$$

Luego,

$$\hat{r} \cdot (\hat{\rho}\hat{\varphi} - \hat{\varphi}\hat{\rho}) = (\hat{r} \cdot \hat{\rho})\hat{\varphi} - (\hat{r} \cdot \hat{\varphi})\hat{\rho} = \hat{r} \times (\hat{\varphi} \times \hat{\rho}) = -\hat{r} \times \hat{z}. \tag{82}$$

Pero esta cantidad es independiente del tiempo, por lo tanto el término correspondiente a $l = 1$ del desarrollo multipolar es nulo. Tener en cuenta en la ecuación anterior que $\hat{r}$ es función de los ángulos φ y θ del punto de observación, mientras que los versores $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$ están evaluados en el ángulo ωt, de modo que no hay ninguna relación especial entre $\hat{r}$, por un lado, y los versores $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$, por el otro; por ejemplo $\hat{r} \cdot \hat{\varphi}$ no es necesariamente cero.