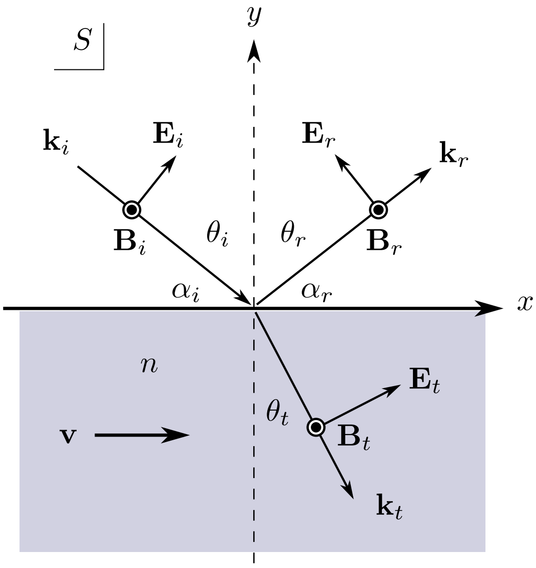
FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre 2015

Fresnel relativista – Guía 6, problema 3.*

Se trata de encontrar las ondas reflejadas y transmitidas en el sistema del laboratorio cuando una onda plana incide sobre la interfase de un dieléctrico que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ paralela a la interfase. El dieléctrico tiene índice de refracción n. La situación no es la más general posible, ya que se considera que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{E}_i$ están en el plano de incidencia.



El dato es la onda incidente en el sistema de laboratorio, aquí llamado S. Es una onda plana de frecuencia ω y ángulo de incidencia θ_i. La figura anterior adelanta algunos de los resultados: por ejemplo, que los campos reflejados y transmitidos conservan la misma polarización y tipo de incidencia que los originales. El problema es fácil de resolver en el sistema en donde el medio está en reposo, S'. La situación en este sistema es la misma que la que muestra la figura, sólo que son todas cantidades primadas y $\mathbf{v} = 0$. Si encontramos en ese sistema las ondas reflejada y refractada, luego podemos transformarlas al sistema de laboratorio. Entonces, lo primero es trasladar el problema al sistema en donde el dieléctrico está en reposo. La onda incidente se propaga en el vacío, de modo que su cuadrivector k_i en S es

$$k_i = \frac{\omega}{c}\left(1, \sin\theta_i, -\cos\theta_i, 0\right). \tag{1}$$

En el sistema S' las fórmulas de aberración relativista y efecto Doppler dan [corregido en 2022, no influye en los resultados posteriores]

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma(1-\beta\sin\theta_i)\frac{\omega}{c}, \qquad \tan\frac{\alpha_i'}{2} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\tan\frac{\alpha_i}{2}. \tag{2}$$

Notar que la última relación se refiere al ángulo que forma cada $\mathbf{k}$ con la velocidad, no con la normal. En el sistema S' todo ocurre según las leyes de reflexión y refracción habituales. La onda reflejada en ese sistema tiene cuadrivector número de onda

$$k_r' = \frac{\omega'}{c}\left(1, \sin\theta_i', \cos\theta_i', 0\right). \tag{3}$$

*Última revisión: 2/12/2022. zanellajdf.uba.ar

De regreso al sistema S encontramos que ahí la onda reflejada se propaga según la dirección

$$\tan\frac{\alpha_r}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\tan\frac{\alpha_i'}{2} = \tan\frac{\alpha_i}{2}. \tag{4}$$

Es decir, también en el sistema de laboratorio la onda se refleja con el mismo ángulo con el que incide. Para obtener su frecuencia lo más sencillo no es, como pudiera parecer, transformar de S' a S, sino de S a S', usando lo que se sabe sobre el ángulo de reflexión en S y la relación (2) entre las frecuencias incidentes en ambos sistemas:

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma(1-\beta\sin\theta_i)\frac{\omega_r}{c} \to \omega_r = \omega. \tag{5}$$

Esta fue la parte fácil del problema. Hemos mostrado que la onda se refleja con la misma frecuencia y que el ángulo de reflexión es igual al de incidencia. Después veremos por qué esto era previsible.

Encontrar la onda transmitida en S da algo de trabajo. En S' su cuadrivector número de onda es†

$$k_t' = \frac{\omega'}{c}\left(1, n\sin\theta_t', -n\cos\theta_t', 0\right). \tag{6}$$

Aquí estamos usando que en el dieléctrico la relación de dispersión es $|\mathbf{k}'| = n\omega'/c$. El cuadrivector k_t en el sistema S es

$$k_t = \frac{\omega'}{c}\Big(\gamma(1+\beta n\sin\theta_t'), \gamma(n\sin\theta_t'+\beta), -n\cos\theta_t', 0\Big). \tag{7}$$

La frecuencia de la onda transmitida en S resulta

$$\frac{\omega_t}{c} = \frac{\omega'}{c}\gamma(1+\beta n\sin\theta_t'). \tag{8}$$

Pero en S' vale la ley de Snell, de modo que $n\sin\theta_t' = \sin\theta_i'$, y entonces

$$\frac{\omega_t}{c} = \frac{\omega'}{c}\gamma(1+\beta\sin\theta_i'). \tag{9}$$

Esta relación es la misma que hay entre las frecuencias de las ondas incidentes en ambos sistemas, de modo que

$$\omega_t = \omega_i. \tag{10}$$

Después veremos por qué esto debe ser así. Con lo que sabemos hasta ahora, el cuadrivector k_t es

$$k_t = \frac{\omega}{c}\left(1, \frac{\sin\theta_i'+\beta}{1+\beta\sin\theta_i'}, -\frac{n\cos\theta_t'}{\gamma(1+\beta\sin\theta_i')}, 0\right).$$

†En clase demostramos que cualquier función que dependa de las coordenadas y el tiempo a través de una variable $\phi = \mathbf{A}\cdot\mathbf{r} - A_0 t$, transforma de un sistema a otro como si las cuatro cantidades $(A_0, \mathbf{A})$ fueran las componentes de un cuadrivector. De modo que la onda plana transmitida, que en S' tiene frecuencia ω' y vector número de onda $\mathbf{k}_t'$, tiene asociado un cuadrivector número de onda $k_t' = \frac{\omega'}{c}(1, n\hat{k}_t')$. Este reparo no es ocioso. Uno sabe que en el vacío ω y $\mathbf{k}$ forman las componentes de un cuadrivector, pero esto no se traslada inmediatamente a una onda que se propaga en un medio. Por eso en clase nos tomamos el trabajo de demostrarlo.

De aquí no es tan fácil leer en qué dirección se propaga $\mathbf{k}_t$, porque las componentes espaciales no necesariamente forman un versor, como ocurría al transformar ondas que se propagaban en el vacío. Algunas cosas pueden simplificarse reemplazando $\sin\theta_i'$ en términos del ángulo θ_i. Para empezar, lo que figura en la componente x es exactamente la ley de transformación de $\sin\theta_i'$ a $\sin\theta_i$,

$$\frac{\sin\theta_i' + \beta}{1 + \beta\sin\theta_i'} = \sin\theta_i. \tag{11}$$

Luego,

$$k_t = \frac{\omega}{c}\left(1, \sin\theta_i, -\frac{n\cos\theta_t'}{\gamma(1+\beta\sin\theta_i')}, 0\right).$$

En la componente y podemos usar que

$$\sin\theta_i' = \frac{\sin\theta_i - \beta}{1 - \beta\sin\theta_i}, \tag{12}$$

lo que da

$$1 + \beta\sin\theta_i' = \frac{1}{\gamma^2(1 - \beta\sin\theta_i)}. \tag{13}$$

En definitiva,

$$k_t = \frac{\omega}{c}\Big(1, \sin\theta_i, -\gamma(1-\beta\sin\theta_i) n\cos\theta_t', 0\Big). \tag{14}$$

No es casualidad que la componente x de k_t sea exactamente igual a la componente x de k_i o de k_r, del mismo modo que no es casualidad que las tres frecuencias sean las mismas. El problema en el sistema de laboratorio sigue teniendo la forma de un problema con condiciones de contorno a través de una interfase plana. Sea cual sea la relación constitutiva que defina k_t en el medio en movimiento, las ecuaciones de continuidad a través de la interfase siempre será de la forma

$$A_i\, e^{i(\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r} - \omega_i t)} + A_r\, e^{i(\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r} - \omega_r t)} + A_t\, e^{i(\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{r} - \omega_t t)}\Big|_{y=0} = 0. \tag{15}$$

El hecho de que no sepamos cómo escribir la relación de dispersión para el medio en movimiento no modifica en nada el carácter de esta ecuación respecto al problema habitual del medio en reposo: para que la ecuación anterior admita soluciones no triviales para los campos A, las frecuencias tienen que ser las mismas y las proyecciones de los vectores de onda $\mathbf{k}$ sobre el plano $y = 0$ tienen que ser iguales:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega, \qquad |\mathbf{k}_i|\sin\theta_i = |\mathbf{k}_r|\sin\theta_r = |\mathbf{k}_t|\sin\theta_t. \tag{16}$$

Además, debido a que las ondas incidentes y reflejadas se propagan en el vacío $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_r| = \omega/c$, y por lo tanto debe ser $\sin\theta_i = \sin\theta_r$. Menos previsiblemente, también resulta

$$|\mathbf{k}_t|\sin\theta_t = \frac{\omega}{c}\sin\theta_i. \tag{17}$$

Esto explica por qué la componente x del cuadrivector k_t en la ec. (14) es lo que es.

El objetivo sigue siendo determinar $\mathbf{k}_t$. Escribamos

$$k = \frac{\omega}{c}\left(1, \boldsymbol{\kappa}\right), \tag{18}$$

con

$$\boldsymbol{\kappa} = \Big(\sin\theta_i, -\gamma(1-\beta\sin\theta_i)n\cos\theta_t', 0\Big). \tag{19}$$

Queremos escribir esto como $\boldsymbol{\kappa} = \kappa\,\hat{\kappa}$. El cálculo directo de κ es elemental. Hay que usar que

$$n\cos\theta_t' = \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i'}. \tag{20}$$

El resultado es

$$\kappa^2 = 1 + (n^2-1)\gamma^2(1-\beta\sin\theta_i)^2. \tag{21}$$

Hay, sin embargo, una forma mucho más sencilla de calcular κ, que es usando el invariante $k\cdot k = k'\cdot k'$. En S' tenemos

$$k' = \frac{\omega'}{c}\left(1, n\,\hat{k}'\right), \tag{22}$$

y en S

$$k = \frac{\omega}{c}\left(1, \kappa\,\hat{\kappa}\right). \tag{23}$$

Debe ser entonces

$$\left(\frac{\omega'}{c}\right)^2(1-n^2) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2(1-\kappa^2). \tag{24}$$

Luego,

$$\kappa^2 = 1 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2(n^2-1). \tag{25}$$

Pero $\omega'/\omega = \gamma(1-\beta\sin\theta_i)$. Luego,

$$\kappa^2 = 1 + (n^2-1)\gamma^2(1-\beta\sin\theta_i)^2,$$

que coincide con la expresión (21). Finalmente, para dar la dirección de propagación de la onda transmitida en S basta con dar la componente x de $\hat{\kappa}$, que es

$$\hat{\kappa}\cdot\hat{x} = \sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{1+(n^2-1)\gamma^2(1-\beta\sin\theta_i)^2}}. \tag{26}$$

Para $\beta = 0$, resulta la ley de Snell habitual.

Para encontrar las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida en el sistema S hay que encontrar la amplitud de la onda incidente en el sistema S', aplicar ahí los resultados de Fresnel y transformar de vuelta al sistema S. Debido a la geometría del problema, lo más sencillo es transformar el campo magnético de la onda incidente. Como es una onda en vacío esto debe coincidir con la amplitud de su campo eléctrico. Teniendo en cuenta que el campo $\mathbf{B}_i$ incidente no tiene componentes paralelas a la velocidad resulta

$$\mathbf{B}_i' = \gamma(\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_i) = \gamma B_i(1 - \beta \sin\theta_i)\,\hat{z}. \tag{27}$$

Entonces,

$$B_i' = E_i' = \gamma B_i(1 - \beta \sin\theta_i). \tag{28}$$

En el sistema S' la amplitud de la onda reflejada es

$$B_r' = E_r' = R(\theta_i')E_i' = \frac{n\cos\theta_i' - \cos\theta_t'}{n\cos\theta_i' + \cos\theta_t'}\,E_i'. \tag{29}$$

Al transformar a S queda $E_r = B_r$, donde

$$B_r = \gamma(B_r' + \beta B_r' \sin\theta_i') = \gamma B_r'(1 + \beta\sin\theta_i'). \tag{30}$$

Usando la ec. (13), resulta

$$B_r = \frac{B_r'}{\gamma(1 - \beta\sin\theta_i)}. \tag{31}$$

Reemplazando aquí $B_r' = R(\theta_i')B_i$, donde B_i' está dado por (28), y usando la igualdad entre las amplitudes de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en vacío, se encuentra finalmente que

$$E_r = R(\theta_i')E_i. \tag{32}$$

Esta no es la ecuación de Fresnel usual, porque los ángulos que aparecen en R son los del sistema S':

$$E_r = \frac{n\cos\theta_i' - \cos\theta_t'}{n\cos\theta_i' + \cos\theta_t'}\,E_i. \tag{33}$$

Mediante la fórmula de aberración

$$\cos\theta_i' = \frac{\cos\theta_i}{\gamma(1 - \beta\sin\theta_i)}, \tag{34}$$

y la ec. (26), con un poco de trabajo la amplitud de la onda reflejada en el sistema de laboratorio puede escribirse como

$$E_r = \frac{n\cos\theta_i - A(\theta_i)}{n\cos\theta_i + A(\theta_i)}, \tag{35}$$

donde

$$A(\theta) = \frac{1}{n}\sqrt{\gamma^2(n^2 - 1)(1 - \beta\sin\theta)^2 + \cos^2\theta}. \tag{36}$$

Encontrar la amplitud de la onda transmitida queda como ejercicio.

La condición para que no haya onda reflejada se escribe en el sistema S' mediante la fórmula del ángulo de Brewster usual. Hay varias expresiones equivalentes, por ejemplo:

$$\sin\theta_B' = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \qquad \tan\theta_B' = n. \tag{37}$$

Para dejar escrito esto en términos de las cantidades del sistema S, lo más sencillo es usar la fórmula de aberración para $\sin\theta_i$,

$$\sin\theta_B = \frac{\sin\theta_B' + \beta}{1 + \beta\sin\theta_B'} = \frac{n + \beta\sqrt{n^2 + 1}}{\beta n + \sqrt{n^2 + 1}}. \tag{38}$$

■