1 Separación de Variables

1.1 Coordenadas Cartesianas

Ecuación de Laplace: $\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$

Base de soluciones para $\Phi(x, y, z) = X(z).Y(y).Z(z)$ **:**

$X(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}$

$Y(y) = A'e^{i\beta y} + B'e^{-i\beta y}$

$Z(z) = A''e^{\gamma z} + B''e^{-\gamma z}$

con $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Solución para $\Phi = 0$ **en** $(0, 0, 0)$ **y** (a, b, z)**:**

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm} z) \tag{1}$$

Solución para intervalo *no* acotado en x **(**$x \in (-\infty, \infty)$**):**

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A_{km}e^{ikx}\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{km} z)dk \tag{2}$$

Condición de Ortogonalidad:

$$\int_0^a \sin(\alpha_n x)\sin(\alpha_{n'} x)dx = \frac{a}{2}\delta_{nn'} \quad , \quad \alpha_n = n\pi/a \tag{3}$$

Condición de Completitud:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}dx = \delta(k - k') \tag{4}$$

1.2 Coordenadas Esféricas

Ecuación de Laplace: $\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2\Phi\phi^2} = 0$

Base de soluciones para $\Phi(r, \theta, \phi) = R(r).P(\theta, \phi)$ **:**

$R(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$ $\quad l = 0, 1, 2, \ldots\infty \quad 0 \le r \le \infty$

$P(\theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(\cos\theta)e^{im\phi}$ $\quad -l \le m \le l \quad 0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \phi \le 2\pi$

donde P_{lm} son las funciones asociadas de Legendre,

$P_{lm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad , x = \cos\theta \quad m \geq 0$

$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \quad , x = \cos\theta$

l = 0	$Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$		
l = 1	$Y_{10} = \sqrt{3/4\pi}\cos\theta$	$Y_{11} = -\sqrt{3/8\pi}\sin\theta e^{i\phi}$	
l = 2	$Y_{20} = \sqrt{5/4\pi}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$	$Y_{21} = -\sqrt{15/8\pi}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$	$Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{15/2\pi}\sin^2\theta e^{2i\phi}$

Solución general:

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right]Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (5)$$

Condiciones de Ortogonalidad:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta Y^*_{l'm'}(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{l'l}.\delta_{m'm} \qquad (6)$$

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \quad , \quad x = \cos\theta \qquad (7)$$

Condición de completitud:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta(\phi-\phi').\delta(\cos\theta - \cos\theta') \qquad (8)$$

con $Y_{l,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{lm}(\theta,\phi)$.

1.3 Coordenadas Cilíndricas

Ecuación de Laplace: $\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$

Base de soluciones para $\Phi(\rho,\phi,z) = R(\rho).Q(\phi).Z(z)$ **:**

$Q(\phi) = Ae^{i\nu\phi} + Be^{-i\nu\phi} \qquad \nu = 0, 1, 2. \ldots \infty$

$Z(z) = A'e^{kz} + B'e^{-kz}$

$R(\rho) = A'' J_\nu(k\rho) + B'' N_\nu(k\rho)$

donde J_ν es la función de Bessel de 1^o especie y N_ν es la función de Neumann (Bessel de 2^o especie). N_ν *diverge* para $\rho \to 0$

Solución para intervalo acotado $(0 \leq \rho \leq a,\ L_1 \leq z \leq L_2)$ **:**

$$\Phi(\rho,\phi,z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{\nu n}e^(i\nu\phi) + B_{\nu n}e^{-i\nu\phi}\right)\left(A'_{\nu n}e^{k_n z} + B'_{\nu n}e^{-k_n z}\right)\left(A''_{\nu n}J_\nu(k_n\rho) + B''_{\nu n}N_\nu(k_n\rho)\right)\right] \tag{9}$$

donde para ν entero, $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$

Solución para intervalo *no* acotado en ρ, z**:**

$$\Phi(\rho,\phi,z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty dk B'_\nu(k)e^{-kz}\left(A_\nu(k)e^(i\nu\phi) + B_{\nu n}(k)e^{-i\nu\phi}\right)\left(A''_\nu(k)J_\nu(k\rho) + B''_\nu(k)N_\nu(k\rho)\right)\right] \tag{10}$$

Condición de Ortogonalidad:

$$\int_0^a \rho J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a).J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)d\rho = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(x_{\nu n})\right]^2\delta_{nn'} \tag{11}$$

donde $0 \leq \rho \leq a$, $\nu \geq 0$ y $x_{\nu n}$ son los ceros de Bessel para $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$

.

Condición de Completitud:

$$\int_0^\infty xJ_\nu(kx).J_\nu(k'x)dx = (1/k)\delta(k'-k) \tag{12}$$