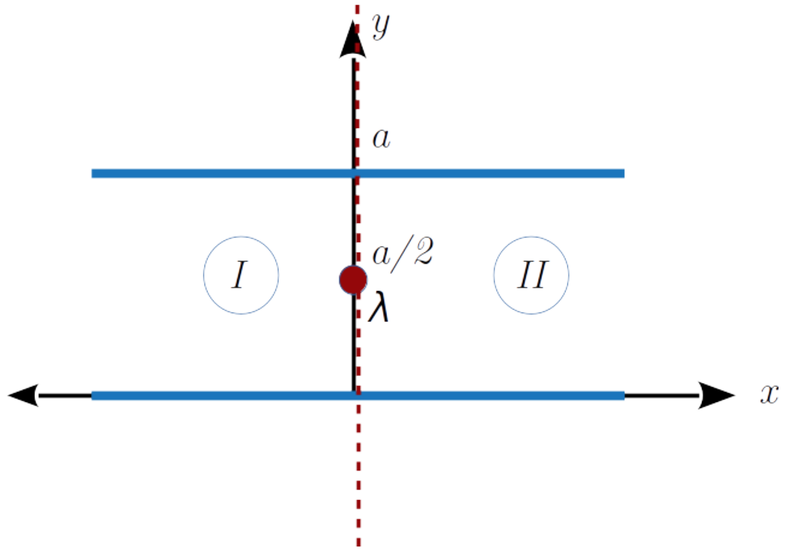
Problema del hilo entre dos planos

Problema

Un alambre con densidad de carga constante λ está equidistante a dos placas conductoras infinitas conectadas a tierra. Utilizando separación de variables, encuentre el potencial entre las placas. Para ello divida la región entre las placas con un corte vertical perpendicular a los planos, como se muestra en la figura.



(a) Solución discretizando los k primero

Esta es la solución más directa. Consideramos que hay simetría de traslación en $\hat{z}$ y $\phi = \phi(x, y)$. Las auto-funciones del problema de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ son las siguientes

$$\{e^{\pm i k_x x}, e^{\pm i k_y y}\} \tag{1}$$

donde $k_x^2 + k_y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x = \pm i|k_y|$. Por simplicidad llamamos $k_y = k$.

La función $e^{\pm|k|.x}$ diverge en $x \to \infty$ si el exponente es positivo, y no debe ser tenida en cuenta. Entonces, la solución del modo k-ésimo es

$$\phi_k = (A\, e^{iky} + B\, e^{-iky})\, e^{-|k|.|x|} \tag{2}$$

Condiciones de contorno en $y = 0$ e $y = a$.

Ambas condiciones indican respectivamente

$$\begin{cases} A + B & = \; 0 \\ \\ A\,e^{ika} + B\,e^{-ika} & = \; 0 \end{cases} \tag{3}$$

La primera relación indica que $B = -A$ y la segunda que $2i\,\mathrm{sen}\,(ka) = 0$. Esto reduce los modos a los valores discretos $k_n = n\pi/a$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. La solución de modo es

$$\phi_n = 2i\,A_n\,\mathrm{sen}\,(n\pi y/a)\,e^{-n\pi|x|/a} \tag{4}$$

La solución más general posible es la siguiente

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} 2i\,A_n\,\mathrm{sen}\,(n\pi y/a)\,e^{-n\pi|x|/a} \tag{5}$$

Condiciones de contorno en $x = 0$.

La primera condición es es $\phi_I = \phi_{II}$ en $x = 0$. Es inmediato que esto se cumple si A_n es el mismo para ambos recintos.

La condición de "salto" en la derivada es

$$\frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} - \frac{\partial \phi_I}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -4\pi\lambda\,\delta(y - a/2) \tag{6}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} -4i\,k_n A_n\,\mathrm{sen}\,(k_n y) = -4\pi\lambda\,\delta(y - a/2) \tag{7}$$

donde $k_n = n\pi/a$. Aplicamos la siguiente propiedad de ortogonalidad para determinar los A_n

$$\int_0^a \mathrm{sen}\,(n\pi y/a)\,\mathrm{sen}\,(n'\pi y/a)\,dy = \frac{a}{2}\delta_{nn'} \tag{8}$$

La expresión (7) resulta

$$-4i\, k_{n'} A_{n'} \frac{a}{2} = -4\pi\lambda\, \mathrm{sen}\,(n'\pi/2) \tag{9}$$

$$\Rightarrow \qquad A_n = -\frac{2i\,\lambda}{n}\, \mathrm{sen}\,(n\pi/2) = -i\pi\,\lambda\, \mathrm{sinc}\,(n\pi/2) \tag{10}$$

para $n > 0$. Observar que $A_{2n} = 0$ no va a contribuir al potencial. La solución más general posible es

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi\lambda \frac{\mathrm{sen}\,[(2n+1)\pi/2]}{(2n+1)\pi/2}\, \mathrm{sen}\,[(2n+1)\pi y/a]\, e^{-(2n+1)\pi|x|/a} \tag{11}$$

(b) Solución discretizando los k al final

Recordamos que la solución del modo k-ésimo es

$$\phi_k = (A\, e^{iky} + B\, e^{-iky})\, e^{-|k|.|x|} \tag{12}$$

donde la expresión entre paréntesis puede escribirse como una única integral si se considera $-\infty < k < \infty$. En ese caso, la solución más general posible es

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{iky}\, e^{-|k|.|x|}\, dk \tag{13}$$

Condiciones de contorno en $x = 0$.

La primera condición es es $\phi_I = \phi_{II}$ en $x = 0$. Es inmediato que esto se cumple si $A(k)$ es el mismo para ambos recintos.

La condición de "salto" en la derivada es la misma que en (6) y resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} -2|k|\, A(k)\, e^{iky}\, dk = -4\pi\lambda\, \delta(y - a/2) \tag{14}$$

Aplicamos la siguiente propiedad de ortogonalidad para determinar los $A(k)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')y}\, dy = 2\pi\,\delta(k-k') \tag{15}$$

La expresión (14) resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} -2|k|\, A(k)\, 2\pi\,\delta(k-k')\, dk = -4\pi\lambda\, e^{-ik'a/2} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \qquad A(k') = \frac{\lambda}{|k'|}\, e^{-ik'a/2} \tag{17}$$

Condiciones de contorno en $y = 0$ e $y = a$.

Si $\phi = 0$ en $y = 0$ e $y = a$, entonces la solución hallada indica que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{|k|}\, e^{-ika/2}\, e^{-|k|.|x|}\, dk & = & 0 \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{|k|}\, e^{ika/2}\, e^{-|k|.|x|}\, dk & = & 0 \end{array} \right. \tag{18}$$

Escrito de forma explícita $e^{\pm ika/2} = \cos(ka/2) \pm i\,\mathrm{sen}(ka/2)$, resultan las igualdades

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \displaystyle 2\int_{0}^{\infty} \frac{\lambda}{|k|}\, \cos(ka/2)\; e^{-|k|.|x|}\, dk & = & 0 \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{|k|}\, \mathrm{sen}(ka/2)\, e^{-|k|.|x|}\, dk & = & 0 \end{array} \right. \tag{19}$$

La última igualdad en (19) se cumple siempre porque su argumento es una función impar. En cambio, la primera integral en (19) sólo se anula si $\cos(ka/2) = 0$ (cualquiera sea el valor de x). Entonces,

$$\frac{ka}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad k_n = \frac{(2n+1)\pi}{a} \qquad\quad (-\infty < n < \infty) \tag{20}$$

Los valores de k deben ser discretos, y por lo tanto, el potencial debe ser

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{iky}\, e^{-|k|.|x|}\, dk = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{ik_n y}\, e^{-|k_n|.|x|} \tag{21}$$

donde $A_n \approx A(k_n)\, \Delta k_n$. La integral en (21) corresponde al paso al límite $\Delta k_n \to dk$. Pero antes de pasar al límite, Δk_n vale

$$\Delta k_n = k_{n+1} - k_n = \frac{(2n+3)\pi}{a} - \frac{(2n+1)\pi}{a} = \frac{2\pi}{a} \tag{22}$$

y los respectivos coeficientes valen

$$A_n = \frac{\lambda}{|k_n|}\, e^{-ik_n a/2}\, \frac{2\pi}{a} = -i\, 2\pi\lambda\, \frac{\mathrm{sen}\,[(2n+1)\pi/2]}{|(2n+1)\pi|} \tag{23}$$

El potencial resulta

$$\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i\, 2\pi\lambda\, \frac{\mathrm{sen}\,[(2n+1)\pi/2]}{|(2n+1)\pi|}\, e^{ik_n y}\, e^{-|k_n|.|x|} \tag{24}$$

Si se escribe explícitamente $e^{ik_n y} = \cos(k_n y) + i\,\mathrm{sen}\,(k_n y)$ se observa que para que el potencial ϕ sea una función real, la contribución total debida a $\cos(k_n y)$ debe ser nula. Esto es efectivamente así porque el producto $\mathrm{sen}\,[(2n+1)\pi/2]\cos(k_n y)$ es una función impar, y se cancelan términos positivos con negativos en la sumatoria de (24). En cambio, la contribución $i\,\mathrm{sen}\,(k_n y)$ genera términos pares. El potencial resultante es

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi\lambda\, \frac{\mathrm{sen}\,[(2n+1)\pi/2]}{(2n+1)\pi/2}\, \mathrm{sen}\,[(2n+1)\pi y/a]\, e^{-(2n+1)\pi).|x|/a} \tag{25}$$