Problema resuelto por la identidad de Green

Problema

Una esfera conductora de radio a está conectada a potencial V y rodeada por una cáscara esférica de radio b cargada uniformemente con densidad σ. Hallar el potencial electrostático en todo el espacio utilizando el método de la función de Green.

Solución

La identidad de Green asegura que

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \rho\, G\, d^3r' - \frac{1}{4\pi} \iint_{S(\mathcal{V})} \phi\, \frac{\partial G}{\partial n'}\, d^2r' + \frac{1}{4\pi} \iint_{S(\mathcal{V})} G\, \frac{\partial \phi}{\partial n'}\, d^2r' \tag{1}$$

donde $\mathcal{V}$ es el volumen de interés, es decir, toda la región $r \geq a$ en donde deseamos hallar $\phi(\mathbf{r})$. La superficie $S(\mathcal{V})$ es la que envuelve a *todo* ese volumen. En este caso, corresponde a la superficie $r = a$, más una superficie de radio $r \to \infty$.

La función de Green en condición de Dirichlet nula para la esfera de radio a es la siguiente

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - r'\,\hat{\mathbf{r}}'|} - \frac{a}{r'}\, \frac{1}{|\mathbf{r} - (a^2/r')\,\hat{\mathbf{r}}'|} \tag{2}$$

Para esta función de Green se anula el argumento de la última integral, ya que $G_D(\mathbf{r}, a\,\hat{\mathbf{r}}') = 0$. Esto es conveniente porque nos evita conocer $\partial\Phi/\partial n'$ en ese contorno. Entonces, sólo debemos evaluar las siguientes contribuciones.

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \rho\, G_D\, d^3r' - \frac{1}{4\pi} \iint_{S(\mathcal{V})} \phi\, \frac{\partial G_D}{\partial n'}\, d^2r' \tag{3}$$

donde $\rho(r') = \sigma\,\delta(r' - b)$ y $\phi(a\,\hat{\mathbf{r}}) = V$ son las fuentes y los contornos conocidos, respectivamente. La primera integral de la expresión (3) corresponde a una integral de Poisson de la forma

$$\int_{\mathcal{V}} \rho\, G_D\, d^3r' = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \frac{\sigma\, b^2 \operatorname{sen}\theta'}{|\mathbf{r} - b\,\hat{\mathbf{r}}'|}\, d\theta'\, d\varphi' - \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \frac{a}{b}\, \frac{\sigma\, b^2 \operatorname{sen}\theta'}{|\mathbf{r} - (a^2/b)\,\hat{\mathbf{r}}'|}\, d\theta'\, d\varphi' \tag{4}$$

No es necesario resolver esta integral para cuaquier punto del espacio $\mathbf{r}$. Basta con resolver para $\mathbf{r} = z\,\hat{\mathbf{z}}$ y usar argumentos de simetría de rotación para generalizar el resultado. En ese caso, evaluamos primero los denominadores de (4).

$$|z\,\hat{\mathbf{z}} - r'\,\hat{\mathbf{r}}'| = \sqrt{z^2 + b^2 - 2\,zb\,\cos\theta'} \tag{5}$$

Éstos no dependen de φ', asíque esta variable se integra directamente. Si se hace el cambio de variable $u = \cos\theta'$, la integral en la variable θ' resulta

$$\int_{\mathcal{V}} \rho\, G_D\, d^3r' = \int_{-1}^{1} \frac{2\pi\sigma\, b^2}{\sqrt{z^2 + b^2 - 2\,zb\,u}}\, d\theta' - \int_{-1}^{1} \frac{2\pi\sigma\, ab}{\sqrt{z^2 + (a^2/b)^2 - 2\,z(a^2/b)\,u}}\, du \tag{6}$$

La primitiva de $(c - du)^{-1/2}$ es $-2(c - du)^{1/2}/d$. Entonces

$$\int_{\mathcal{V}} \rho\, G_D\, d^3r' = -2\pi\sigma\, b\Big(\frac{|z-b|}{z} - \frac{|z+b|}{z}\Big) + 2\pi\sigma\, ab\Big(\frac{|z - a^2/b|}{z(a^2/b)} - \frac{|z + a^2/b|}{z(a^2/b)}\Big) \tag{7}$$

La coordenada z puede ser reemplazada por r (esféricas) debido a la simetría de rotación. La expresión (7) es una función partida en $r = b$ (antes $z = b$) para el primer término. El segundo término, en cambio, vale siempre lo mismo para y $r > a$ (antes $z > a$).

$$\int_{\mathcal{V}} \rho\, G_D\, d^3r' = \begin{cases} 4\pi b\,\sigma - \dfrac{4\pi ab\sigma}{r} & \text{si} \quad a \le r \le b \\[2ex] \dfrac{4\pi b^2\sigma}{r} - \dfrac{4\pi ab\sigma}{r} & \text{si} \quad r > b \end{cases} \tag{8}$$

La segunda integral de la expresión (3) puede ser muy trabajosa de calcular. Pero es posible evitar su cómputo si se la asimila a una integral de Gauss. Observemos primero que $\phi(a\,\hat{\mathbf{r}}) = V$ y que la normal saliente al volumen de interés es $\hat{\mathbf{n}}' = -\hat{\mathbf{r}}'$.

$$\iint_{S(\mathcal{V})} \phi\, \frac{\partial G_D}{\partial n'}\, d^2r' = -V \iint_{r'=a} \frac{\partial G_D}{\partial r'}\, d^2r' \tag{9}$$

Recordar que $G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}',\mathbf{r})$ (ver detalles al final). Esto se expresa del siguiente modo.

$$G_D(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}' - r\,\hat{\mathbf{r}}|} - \frac{a}{r}\,\frac{1}{|\mathbf{r}' - (a^2/r)\,\hat{\mathbf{r}}|} \tag{10}$$

La expresión (10) se puede interpretar como el potencial observado en el punto $\mathbf{r}'$ debido a una carga $q = 1$ ubicada en el punto $r\hat{\mathbf{r}}$ y su imagen $q' = -a/r$ ubicada en $a^2\hat{\mathbf{r}}/r$. Entonces, la derivada

$$\frac{\partial G_D}{\partial r'} = \nabla G_D \cdot \hat{\mathbf{r}}' = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}' \tag{11}$$

corresponde al campo eléctrico en el punto $\mathbf{r}'$ debido a las cargas q y su imagen q'. El campo eléctrico tiene dirección normal a la esfera de radio a porque ésta corresponde a una superficie equipotencial. Por la ley de Gauss debe ser

$$\iint_{r'=a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}' = -4\pi\,\frac{a}{r} \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{4\pi}\iint_{S(\mathcal{V})} \phi\,\frac{\partial G_D}{\partial n'}\,d^2r' = -\frac{V}{4\pi}\iint_{r'=a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}' = \frac{V a}{r} \tag{13}$$

donde este resultado es válido en el volumen de interés $r > a$. Sumando todas las contribuciones resulta

$$\phi = \begin{cases} 4\pi b\,\sigma - \dfrac{4\pi a b\sigma}{r} + \dfrac{V a}{r} & \text{si} \quad a \leq r \leq b \\[2ex] \dfrac{4\pi b^2\sigma}{r} - \dfrac{4\pi a b\sigma}{r} + \dfrac{V a}{r} & \text{si} \quad r > b \end{cases} \tag{14}$$

Nota sobre la simetría de la función de Green

Observar que

$$\frac{1}{|r\hat{\mathbf{r}} - r'\hat{\mathbf{r}}'|} = \frac{1}{|r'\hat{\mathbf{r}}' - r\hat{\mathbf{r}}|} \tag{15}$$

y además

$$-\frac{a}{r'}\frac{1}{|r\hat{\mathbf{r}} - (a^2/r')\hat{\mathbf{r}}'|} = -\frac{a}{r}\frac{1}{|r'\hat{\mathbf{r}} - (a^2/r)\hat{\mathbf{r}}'|} \tag{16}$$

El módulo de la última expresión vale

$$|r'\hat{\mathbf{r}} - (a^2/r)\hat{\mathbf{r}}'| = \sqrt{r'^2 + (a^2/r)^2 - 2\,r'(a^2/r)\,\cos(\hat{\mathbf{r}}', \hat{\mathbf{r}})} \tag{17}$$

donde $\cos(\hat{\mathbf{r}}', \hat{\mathbf{r}}) = \cos(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$. Por lo tanto

$$|r'\hat{\mathbf{r}} - (a^2/r)\hat{\mathbf{r}}'| = |r'\hat{\mathbf{r}}' - (a^2/r)\hat{\mathbf{r}}| \tag{18}$$