# Cálculo de un dipolo frente a esfera por Green

La función de Green en condición de Dirichlet nula para la esfera de radio $a$ es la siguiente

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - r'\,\hat{\mathbf{r}}'|} - \frac{a}{r'}\,\frac{1}{|\mathbf{r} - (a^2/r')\,\hat{\mathbf{r}}'|} \tag{1}$$

## (a) Consideramos la distribución dipolar

La distribución de un dipolo $p_0\,\hat{z}$ ubicado en $d\,\hat{z}$ es:

$$\rho(r') = -p_0\,\delta(x')\delta(y')\frac{d}{dz'}\delta(z' - d) \tag{2}$$

Evaluando la identidad de Green se obtiene

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \rho\, G_D\, d^3r' = \int_{-\infty}^{\infty} -p_0\,\frac{d}{dz'}\delta(z' - d)\, G_D(0, 0, z')\, dz' \tag{3}$$

Ahora aplicamos integración por partes

$$\phi(\mathbf{r}) = -p_0\,\delta(z' - d)\, G_D(z')\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -p_0\,\delta(z' - d)\,\frac{dG_D}{dz'}\,dz' = p_0\,\frac{dG_D}{dz'}\Big|_{z'=d} \tag{4}$$

## (b) Consideramos la distribución de dos cargas opuestas

La distribución de una carga $-q$ ubicado en $d\,\hat{z}$ es:

$$\rho(r') = -q\,\delta(x')\delta(y')\delta(z' - d) \tag{5}$$

Evaluando la identidad de Green se obtiene

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \rho \, G_D \, d^3r' = -q \, G_D(0,0,d) \tag{6}$$

y un resultado análogo se obtiene para una carga en $q$ ubicada en $(d+\epsilon)\,\hat{z}$. La suma de ambos potenciales es

$$\phi_{\text{tot}} = q \, G_D(d+\epsilon) - q \, G_D(d) = q\epsilon \, \frac{G_D(d+\epsilon) - G_D(d)}{\epsilon} \to p_0 \, \frac{dG_D}{dz'}\Big|_{z'=d} \tag{7}$$

Se obtiene lo mismo que en el caso anterior.