Espira de corriente frente a imán esférico

Problema

Una esfera de radio a, magnetizable con permeabilidad μ, está centrada con una espira de radio $b > a$ por donde circula una corriente I. Calcular el campo magnético en todo el espacio en términos del campo $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_d$, con fuentes en su rotor y fuentes en su divergencia, respectivamente.

Solución

Sabemos que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad , \qquad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\,\mathbf{M} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}_L \qquad , \qquad \mathbf{J}_L = \dfrac{I}{b}\,\delta(\cos\theta)\,\delta(r-b)\,\hat{\varphi} \end{cases} \tag{1}$$

$\mathbf{J}_L$ es la densidad de corriente de la espira de radio b y $\mathbf{M}$ es la magnetización de la esfera de radio a.

En principio, la magnetización $\mathbf{M}$ es desconocida. Pero sabemos que es inducida y que $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$ dentro del imán (y $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ afuera). Su divergencia es

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = \frac{1-\mu^{-1}}{4\pi}\,\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

dentro del imán. En el contorno del imán, en cambio, debe ser $\nabla \cdot \mathbf{M} \neq 0$, ya que allí $\mathbf{M}$ cambia bruscamente. Si separamos el campo en $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_d$ resulta

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{H}_d = -4\pi\,\nabla \cdot \mathbf{M} = 4\pi\,\sigma_M\,\delta(r-a) \\ \nabla \times \mathbf{H}_r = \dfrac{4\pi}{c}\,\dfrac{I}{b}\,\delta(\cos\theta)\,\delta(r-b)\,\hat{\varphi} \end{cases} \tag{3}$$

donde $\sigma_M = \mathbf{M}\cdot\hat{r}$ en el contorno del imán (de valor desconocido). Vemos que σ_M actúa como "fuente" de $\mathbf{H}_d$, de la misma manera que $\mathbf{J}_L$ es "fuente" de $\mathbf{H}_r$. Por el contrario,

$\mathbf{H}_d$ no tiene fuentes "rotacionales" y $\mathbf{H}_r$ no tiene fuentes "divergentes". Entonces

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}_d &= 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{H}_d = -\nabla\phi \\ \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_r &= 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{H}_r = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases} \tag{4}$$

Si se introducen estos potenciales en (3) y se tiene en cuenta que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$, resulta (asumiendo $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$)

$$\begin{cases} \nabla^2\phi &= -4\pi\,\sigma_M\,\delta(r-a) \\ \\ \nabla^2\mathbf{A} &= -\dfrac{4\pi}{c}\dfrac{I}{b}\,\delta(\cos\theta)\,\delta(r-b)\,\hat{\varphi} \end{cases} \tag{5}$$

La segunda ecuación en (5) tiene una fuente conocida y puede resolverse por separación de variables (en regiones contiguas a $r = b$). Obervar que, dado que la fuente tiene dirección $\hat{\varphi}$, entonces $\mathbf{A} = A(r,\theta)\,\hat{\varphi}$. En componentes cartesianas $A(r,\theta)\,\hat{\varphi} = A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y}$. La ec. (5) se expresa así,

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x &= \dfrac{4\pi}{c}\dfrac{I}{b}\,\delta(\cos\theta)\,\delta(r-b)\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \\ \nabla^2 A_y &= -\dfrac{4\pi}{c}\dfrac{I}{b}\,\delta(\cos\theta)\,\delta(r-b)\,\cos\varphi \end{cases} \tag{6}$$

Notar que sólo basta con hallar una de ellas y evaluar el resultado en el φ correspondiente. Por ejemlo, si $\varphi = 0$ resulta $A_y = A(r,\theta)$. Por otro lado, la "fuente" de A_y varía como $\cos(\varphi)$, de manera que se puede expresar por medio de exponenciales $\exp(\pm i\varphi)$. Esto significa que si A_y se expresa a través de armónicos esféricos, sólo estarán presentes aquellos com $m = \pm 1$.

La primera ecuación en (5) no depende de φ. Si la solución se expande en armónicos esféricos, sólo estarán presentes aquellos com $m = 0$. Esto es equivalente a expendir la solución en polinomios de Legendre.

Las soluciones de ambos potenciales son las siguientes

$$\phi = \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty} C_{l0}\, r^l\, P_l^0(\cos\theta) & \text{si} \quad r < a \\ \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{D_{l0}}{r^{l+1}}\, P_l^0(\cos\theta) & \text{si} \quad r > a \end{cases} \tag{7}$$

$$A_y = \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty} \left[C_{l(-1)}, Y_{l(-1)}(\theta,0) + C_{l1}, Y_{l1}(\theta,0)\right] r^l & \text{si} \quad r < b \\ \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{D_{l(-1)}, Y_{l(-1)}(\theta,0) + D_{l1}, Y_{l1}(\theta,0)}{r^{l+1}} & \text{si} \quad r > b \end{cases} \tag{8}$$

donde $Y_{lm}(\theta,0) = \sqrt{\dfrac{2l+1}{4\pi}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)$.

Es conveniente expresar ambas soluciones respecto de la misma base. Entonces, definimos $C_{l(\pm1)}\, Y_{l(\pm1)}(\theta,0) = \tilde{C}_{l(\pm1)} P_l^{\pm1}(\cos\theta)$, y de manera análoga, $D_{l(\pm1)}\, Y_{l(\pm1)}(\theta,0) = \tilde{D}_{l(\pm1)} P_l^{\pm1}(\cos\theta)$. Además, sabemos que

$$P_l^{-1}(\cos\theta) = -\frac{(l-1)!}{(l+1)!}\, P_l^1(\cos\theta) \tag{9}$$

de manera que agrupando términos, basta con escribir únicamente los sumandos con $m=1$ en la solución de A_y.

$$A_y = \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty} \tilde{C}_{l1}\, r^l\, P_l^1(\cos\theta) & \text{si} \quad r < b \\ \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{\tilde{D}_{l1}}{r^{l+1}}\, P_l^1(\cos\theta) & \text{si} \quad r > b \end{cases} \tag{10}$$

Condiciones en los potenciales

(1) **En r=b:**

El potencial **A** está definido en $r = b$. Por lo tanto, podemos pedir continuidad en ese contorno.

$$A_y(b^-) = A_y(b^+) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{C}_l^1 b^l = \frac{\tilde{D}_l^1}{b^{l+1}} \tag{11}$$

A partir de esta relación se puede escribir el potencial de manera compacta como

$$A_y = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{B}_{l1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l^1(\cos\theta) \tag{12}$$

donde $r_< = \min(r, b)$ y $r_< = \max(r, b)$.

(2) **En r=a:**

El potencial ϕ está definido en $r = a$. Por lo tanto, podemos pedir continuidad en ese contorno.

$$\phi(a^-) = \phi(a^+) \qquad \Rightarrow \qquad C_l^0 a^l = \frac{D_l^0}{a^{l+1}} \tag{13}$$

A partir de esta relación se puede escribir el potencial de manera compacta como

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{A}_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta) \tag{14}$$

donde $r_< = \min(r, a)$ y $r_< = \max(r, a)$. Se suprimió el índice $m = 0$ porque $P_l^0(\cos\theta) = P_l(\cos\theta)$.

Condiciones en los campos

Las condiciones de contorno para los campos tangenciales son las siguientes:

(1) **En $\boldsymbol{r}$=$\boldsymbol{b}$:**

El campo $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_d$ presenta una discontinuidad debido a la corriente $\mathbf{J}_L$. Sin embargo, $\nabla \times \mathbf{H}_d = 0$, de manera que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Big[\mathbf{H}(b^-) - \mathbf{H}(b^+)\Big] \times \hat{r} & = & \dfrac{4\pi}{c} J_L \,\hat{\varphi} \\[2ex] \Big[\mathbf{H}_d(b^-) - \mathbf{H}_d(b^+)\Big] \times \hat{r} & = & 0 \end{array} \right. \tag{15}$$

La componente tangencial $\mathbf{H}_r \times \hat{r}$ tiene dirección en $\hat{\theta}$ y vale

$$H_r^{(\theta)} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA) = -\frac{A}{r} - \frac{\partial A}{\partial r} \tag{16}$$

Entonces, las condiciones (15) expresadas en función de A_y se resumen así

$$-\frac{\partial A_y(b^-)}{\partial r} + \frac{\partial A_y(b^+)}{\partial r} = -\frac{4\pi}{c}\frac{I}{b}\,\delta(\cos\theta) \tag{17}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\tilde{B}_{l1}\,P_l^1(\cos\theta) = \frac{4\pi\, b}{c}\,I\,\delta(\cos\theta) \tag{18}$$

La relación de ortogonalidad que aplica a los P_l^m es la siguiente

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}^m(x) P_l^m(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{l'l} \tag{19}$$

Resulta

$$\tilde{B}_{l1} = \frac{(l-1)!}{(l+1)!}\,\frac{2\pi\, b}{c}\, I\, P_l^1(0) \tag{20}$$

(2) **En $\boldsymbol{r}$=$\boldsymbol{a}$:**

El campo $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_d$ presenta una discontinuidad debido a la carga "ficticia" σ_M. Sin embargo, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{H}_r = 0$, de manera que

$$\begin{cases} \Big[\mu\, \mathbf{H}(a^-) - \mathbf{H}(a^+)\Big] \cdot \hat{r} \; = \; 0 \\ \\ \Big[\mathbf{H}_r(a^-) - \mathbf{H}_r(a^+)\Big] \cdot \hat{r} \; = \; 0 \end{cases} \tag{21}$$

La segunda condición en (21) indica que la componente normal de $\mathbf{H}_r$ es continua. La primera condición en (21) indica que

$$\Big[\mu\, \mathbf{H}_d(a^-) - \mathbf{H}_d(a^+)\Big] \cdot \hat{r} = -(\mu - 1)\, \mathbf{H}_r(a^+) \cdot \hat{r} \tag{22}$$

En términos de los potenciales es

$$\mu\, \frac{\partial \phi(a^-)}{\partial r} - \frac{\partial \phi(a^+)}{\partial r} = \frac{\mu - 1}{r \operatorname{sen}\theta}\, \frac{\partial(\operatorname{sen}\theta\, A_\varphi)}{\partial \theta}\bigg|_{a^+} \tag{23}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}_l}{a^2}\, [(\mu+1)\, l + 1]\, P_l(\cos\theta) = \frac{\mu - 1}{r \operatorname{sen}\theta}\, \frac{\partial(\operatorname{sen}\theta\, A_\varphi)}{\partial \theta}\bigg|_{a^+} \tag{24}$$

donde $A_\varphi = A_y$. Para evaluar el miembro derecho debemos usar la siguiente relación (ver Jackson, Cap. *Magnetostatics*)

$$\frac{d}{dx}\Big[\sqrt{1-x^2}\, P_l^1(x)\Big] = l(l+1)\, P_l(x) \quad , \quad x = \cos\theta \tag{25}$$

Resulta

$$\frac{\mu-1}{a\,\mathrm{sen}\,\theta}\,\frac{\partial(\,\mathrm{sen}\,\theta\, A_y)}{\partial\theta} = -\frac{\mu-1}{a}\,\sum_{l=0}^{\infty}\left[\tilde{B}_{l1}\,\frac{a^l}{b^{l+1}}\,\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\, P_l^1(x)\right] \tag{26}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{l=0}^{\infty}\tilde{A}_l\,[(\mu+1)\,l+1]\,P_l(x) = -(\mu-1)\,\sum_{l=0}^{\infty}\left[\tilde{B}_{l1}\,\frac{a^{l+1}}{b^{l+1}}\,l(l+1)\,P_l(x)\right] \tag{27}$$

Los coeficientes de ambos miembros deben ser iguales porque los $P_l(\cos\theta)$ forman una base. Entonces,

$$\tilde{A}_l = \frac{(1-\mu)\,l(l+1)}{(1+\mu)\,l+1}\,\tilde{B}_{l1}\left(\frac{a}{b}\right)^{l+1} \tag{28}$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{A}_l = \frac{1-\mu}{(1+\mu)\,l+1}\,\frac{2\pi\, b}{c}\,I\left(\frac{a}{b}\right)^{l+1} P_l^1(0) \tag{29}$$